Coeficiente de correlação amostral

Maria Eugénia Graça Martins

Referência: Graça Martins, E. (2014), Revista de Ciência Elementar, 2(02):0069

A **Correlação** entre duas variáveis de tipo quantitativo descreve a associação entre essas variáveis.
Na presença de um conjunto de dados bivariados o primeiro passo na análise desses dados é representá-los num diagrama de dispersão. A forma da nuvem de pontos, representada no diagrama, pode mostrar uma associação linear entre as duas variáveis, que pode ser expressa numericamente pelo **coeficente de correlação amostral** de Pearson ou pelo seu quadrado que se chama coeficiente de determinação.
O Coeficiciente de correlação amostral de Pearson, representado por *r*, é uma medida da direção e grau com que duas variáveis, de tipo quantitativo, se associam linearmente.
Se representarmos por $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \{(X_i,Y_i)\}$, com $i = 1, \ldots, n$, uma amostra de dados bivariados, o coeficiente de correlação amostral de Pearson calcula-se a partir da seguinte fórmula:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}} \quad \text{onde } \bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \text{ e } \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$$

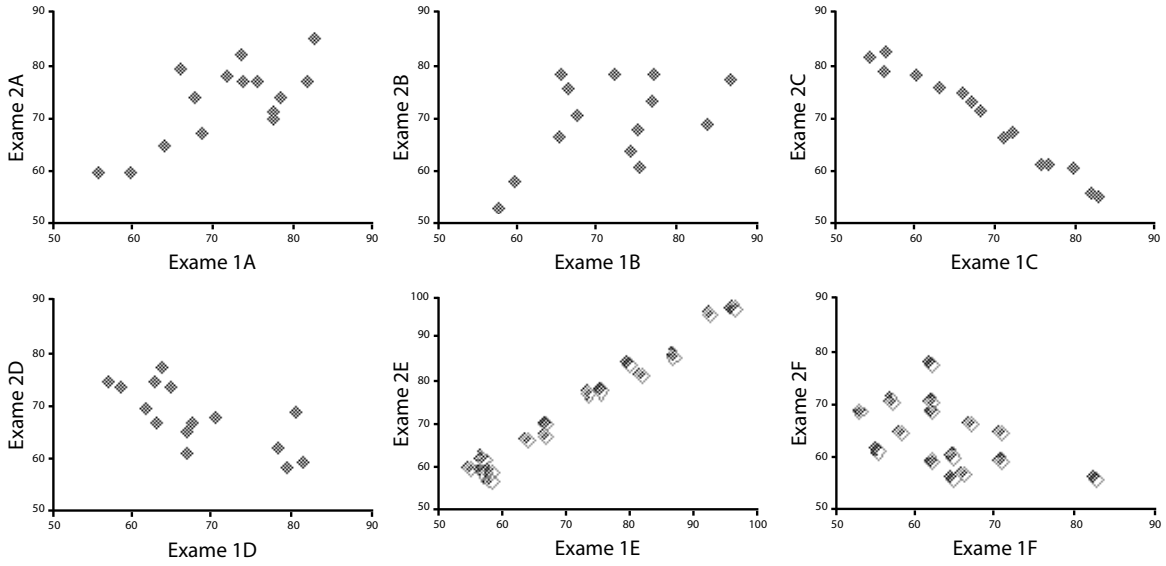
ou seja, o coeficiente de correlação r para o par de variáveis $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ é o quociente entre a covariância amostral das variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e o produto dos desvios padrões respetivos:

$$r = \frac{Cov(x,y)}{s_x s_y}$$

Podem-se mostrar as seguintes propriedades do coeficiente de correlação *r*:

1. O coeficiente de correlação assume valores entre -1 e 1.
2. Quanto maior for o valor de *r*, em módulo, maior será o grau de associação linear entre as variáveis.
3. Um valor de *r positivo* indica uma associação *linear positiva* entre as duas variáveis, isto é, quando os valores de uma das variáveis aumentam, existe tendência para que os valores da outra variável também aumentem. Um valor de *r negativo* indica uma associação *linear negativa* entre as duas variáveis, isto é, quando os valores de uma das variáveis aumentam, existe tendência para que os valores da outra variável diminuam.
4. O coeficiente de correlação não é uma medida *resistente*, isto é, pode ser influenciado pela existência nos dados de alguns valores *estranhos* ou *outliers*, ou seja, valores muito maiores ou menores que os restantes, pelo que deve ser interpretado com o devido cuidado. A representação prévia dos dados num diagrama de dispersão, antes de proceder ao cálculo do coeficiente de correlação, permite detetar a existência de *outliers*.

Apresentam-se a seguir alguns exemplos de representações gráficas de conjuntos de dados relativos a notas obtidas em dois exames por alunos de 6 classes e respetivos coeficientes de correlação (Adaptado de Rossman, A. J. (1996)):



A visualização dos gráficos anteriores leva-nos a supor que entre os dois exames se possa admitir o seguinte tipo de associação:

	Forte	Moderada	Fraca
Positiva	E	A	B
Negativa	C	D	F

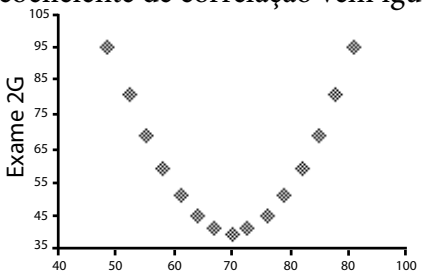
O cálculo do coeficiente de correlação, que se apresenta na tabela seguinte, completa a informação da tabela anterior:

Classe	Correlação
A	0.71
B	0.47
C	-0.99
D	-0.72
E	0.99
F	-0.47

Repare-se que apenas nos casos em que | r | é muito elevado faz sentido falar de associação linear forte, como é observado nos casos C e E em que o gráfico de dispersão aponta para isso.

Num contexto de regressão linear simples, em que a variável explanatória é x e a variável resposta é y, o coeficiente de determinação r^2 dá a percentagem de variabilidade dos y's que fica explicada em função da variabilidade dos x's. Assim, embora aparentemente um valor de r à volta de 0,7 possa parecer elevado, na realidade, é maior a percentagem de variabilidade que fica por explicar (100-49)% do que a explicada ($100x0,7^2$)%, pelo que um valor de r naquela ordem de grandeza corresponde a um relacionamento moderado.

Mais uma vez se chama a atenção para que o coeficiente de correlação só mede a intensidade com que duas variáveis se associam linearmente. Como se verifica no exemplo seguinte existe uma forte associação entre os dados do Exame1 e os dados do Exame2 e no entanto o coeficiente de correlação vem igual a 0.



Correlação e relação causa-efeito É importante não confundir associação, medida pelo coeficiente de correlação, com relação *causa-efeito*. Um diagrama de dispersão e uma correlação não provam a existência de uma relação *causa-efeito*. Podem existir outras variáveis, que não são estudadas, mas influenciam as que estão a ser estudadas e que são conhecidas como variáveis *lurking* ou *confounding* (variáveis de confundimento).

O coeficiente de correlação amostral r pode ser usado para estimar o coeficiente de correlação populacional ρ.

Referências

1. Murteira, B., Ribeiro, C. S., Silva, J. A., Pimenta, C. (2002) – *Introdução à Estatística*. McGraw-Hill de Portugal, Lda. ISBN: 972-773-116-3.
2. Rossman, A.J. (1996) - *Workshop Statistics: Discovery with data*. New York: Springer-Verlag.
3. Pestana, D., Velosa, S. (2010) – *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Volume I, 4ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian. ISBN: 978-972-31-1150-7. Depósito Legal 311132/10.

Autor

Maria Eugénia Graça Martins
Departamento de Estatística e Investigação Operacional da
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Editor

José Francisco Rodrigues
Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa