REVISTA DE
CIÊNCIA ELEMENTAR
Volume 1 | Ano 2013 Número 1 | Outubro a Dezembro

# Triângulo

João Nuno Tavares

Nuno Tavares, J. (2013), Revista de Ciência Elementar, 1(01):0025

**Triângulo**. Do latim *triangulum*, de *tri*, "três", e *angulus*, "ângulo".

### Triângulo no plano

Um triângulo é um polígono com três lados. É pois a região do plano limitada por três segmentos de reta ***a***, ***b*** e ***c*** (os seus **lados**), contíguos dois a dois nas suas extremidades ***A***, ***B*** e ***C*** (os **vértices**).

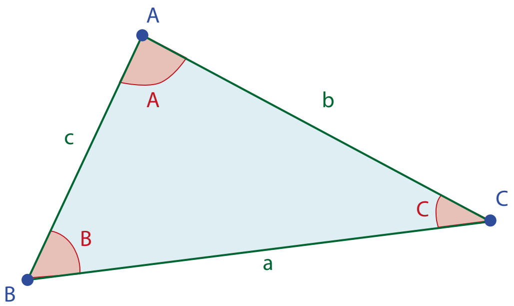



**Figura 1** - Triângulo. Elementos principais.

Um triângulo ***ABC*** possui seis elementos principais (ver figura 1)

- lados ***a***, ***b*** e ***c***
- 3 vértices ***A***, ***B*** e ***C***

***a*** diz-se o lado oposto ao vértice ***A***, ***b*** o lado oposto ao vértice ***B*** e ***c*** o lado oposto ao vértice ***C***. Os ângulos internos, ou as suas medidas, são designadas habitualmente pelas letras maiúsculas ***A***, ***B***, ***C***, afetas aos respetivos vértices (figura 1).

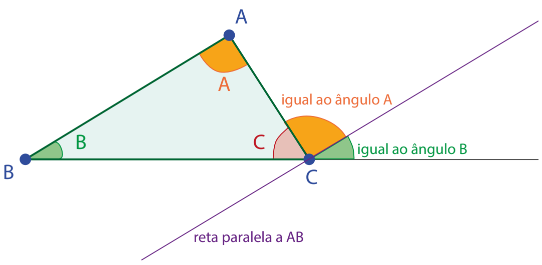



**Figura 2** - A soma dos ângulos internos é igual a 180º.

Um dos resultados básicos é o seguinte *"A soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a 180º"*.

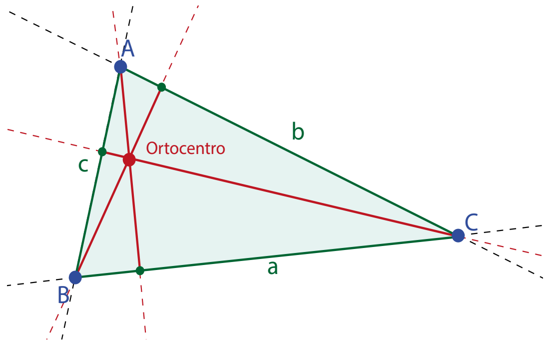
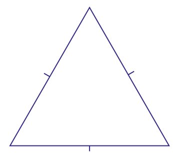
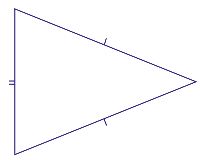
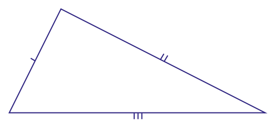


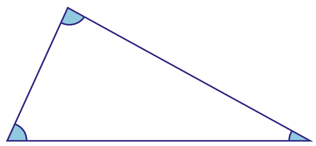
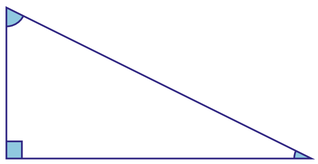
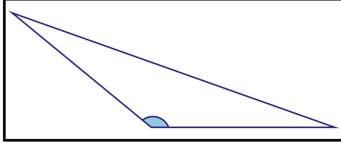

**Figura 3** - Elementos secundários. Alturas e ortocentro.

### Classificação de triângulos

Os triângulos podem ser classificados quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos.
Quanto aos seus **lados** os triângulos classificam-se em:

| | |
|---|---|
|  | **Triângulo equilátero:** tem os seus três lados com o mesmo comprimento; |
|  | **Triângulo isósceles:** tem dois lados com o mesmo comprimento; |
|  | **Triângulo escaleno:** tem todos os lados com comprimento desigual. |

Quanto os seus **ângulos** os triângulos classificam-se em:

| | |
|---|---|
|  | **Triângulo acutângulo:** tem os três ângulos internos agudos; |
|  | **Triângulo retângulo:** um dos três ângulos do triângulo é um ângulo reto; |
|  | **Triângulo obtusângulo:** um dos três ângulos do triângulo é um ângulo obtuso. |

Um triângulo ABC possui vários elementos secundários (ver figura 3)

- 3 alturas. Uma **altura** é a reta perpendicular baixada de um vértice para o lado oposto.
  **Facto notável:** as 3 alturas intersetam-se num único ponto a que se chama o ortocentro do triângulo. Por altura também se entende o comprimento do segmento de reta baixado de um vértice para o lado oposto (figura 3). Este conceito é útil quando se discutem questões métricas num triângulo. O contexto tornará claro a que nos referimos.
- 3 medianas. Uma **mediana** é a reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.
  **Facto notável:** as 3 medianas intersetam-se num único ponto a que se chama o baricentro ou centro de gravidade do triângulo.

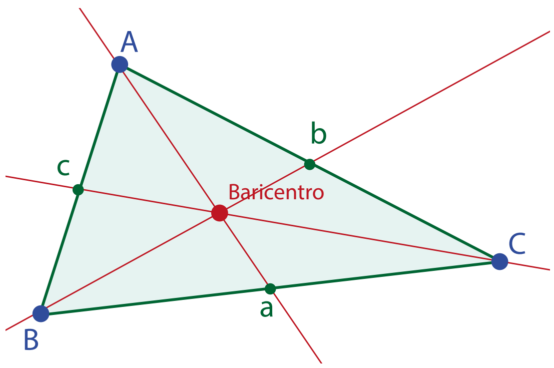



**Figura 4** - Elementos secundários. Medianas e baricentro.

- 3 bissetrizes. As **bissetrizes** dos seus ângulos internos.
  **Facto notável:** as 3 bissetrizes intersetam-se num único ponto a que se chama o incentro do triângulo. O incentro é o centro da **circunferência inscrita** no triângulo (tangente a cada um dos lados).

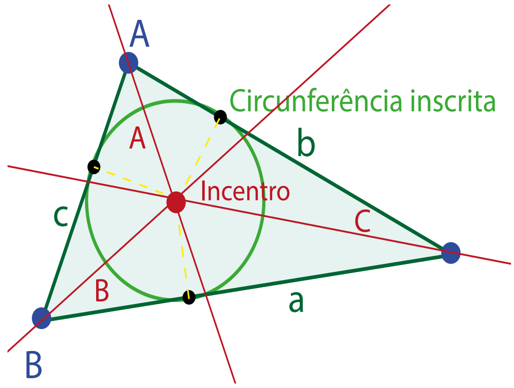



**Figura 5** - Bissetrizes, incentro e circunferência inscrita.

- 3 mediatrizes - as **mediatrizes** dos seus lados, isto é, as retas perpendiculares a cada um desses lados e que passam pelos respetivos pontos médios.
  **Facto notável:** as 3 mediatrizes intersetam-se num único ponto a que se chama o **circuncentro** do triângulo. O circuncentro é o centro da **circunferência circunscrita** no triângulo (que passa pelos 3 vértices).

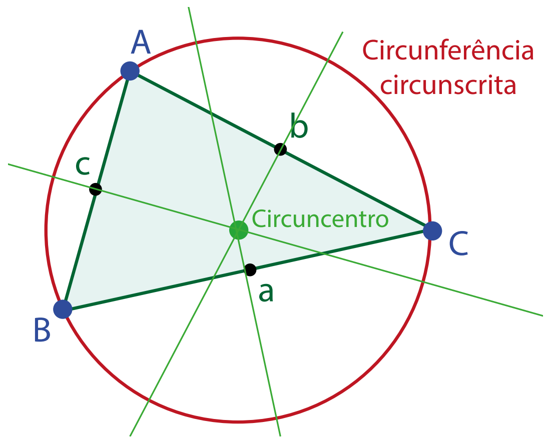



**Figura 6** - Mediatrizes, circuncentro e circunferência circunscrita.

**A reta de Euler. Um facto extraordinário.**
O ortocento, baricentro e circuncentro de um triângulo, que se definiram anteriormente, passam todos por uma mesma reta a que se chama a reta de Euler (figura 6). Em geral o incentro não pertence à reta de Euler!

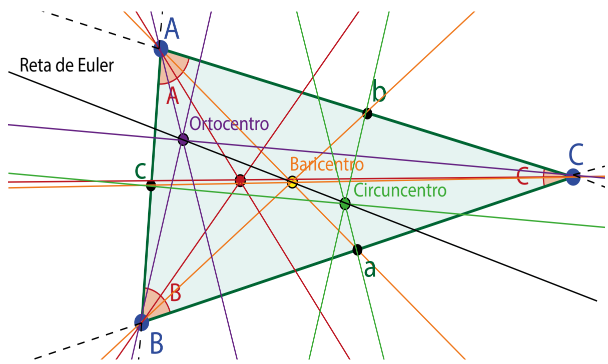



**Figura 7** - Reta de Euler.

### Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

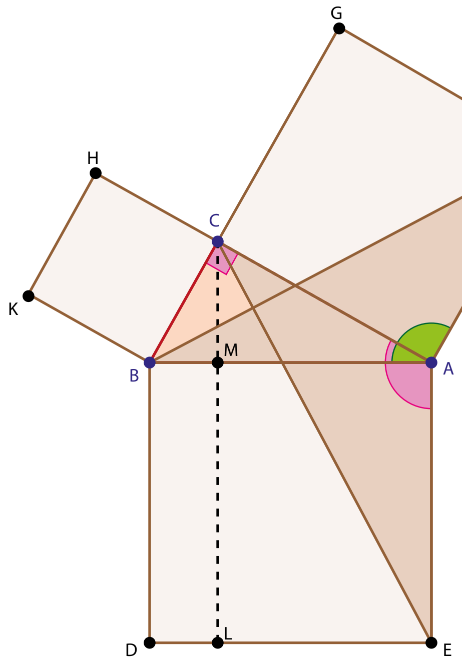



**Figura 8** - Teorema de Pitágoras. Demonstração de Euclides (300 AC)

Existem dezenas de demonstrações do Teorema de Pitágoras. Em 1940, num livro de Elisa Loomis, intitulado The Pythagorean Proposition, incluem-se 367 provas diferentes! Na figura 8 ilustra-se a demonstração de Euclides:

- Os triângulos ***ABF*** e ***AEC*** são "iguais" (isto é, são isométricos). De facto, ***AE*** = ***AB***, ***AF*** = ***AC*** e **<** (***BAF***) = **<** (***CAE***).
- Para calcular a área do triângulo ***ABF***, retângulo em ***C***, Euclides faz intervir a base ***AF*** e a altura.

### Outros triângulos

Como vimos, um dos resultados básicos para triângulos no plano (Euclideano) é o seguinte "*A soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a 180º*". É possível imaginar outras geometrias onde este resultado é falso.

Por exemplo, imaginemos uma geometria na superfície de uma esfera onde as Retas são os círculos máximos,isto é, as circunferências obtidas intersetando a esfera com um plano que passa no seu centro.

Nesta geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a 180º!

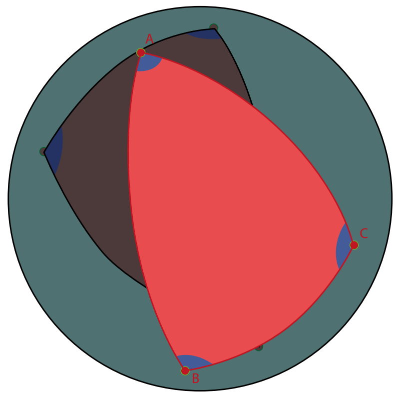



**Figura 9**

Um outro exemplo, imaginemos uma geometria no interior de um disco plano ***D***, mas em que as Retas são as partes em ***D*** das circunferências, ou das retas usuais, ortogonais à circunferência do bordo de ***D***. Nesta geometria, dita hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é inferior a 180º!

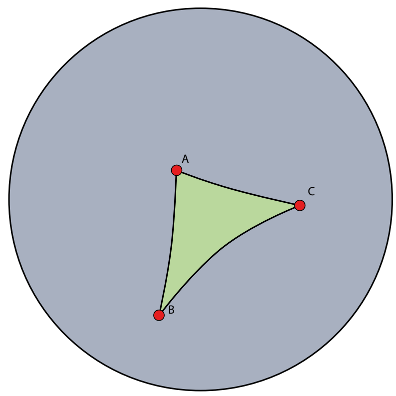



**Figura 10**

Clique aqui para aceder à versão *html* com material interativo.
(http://rce.casadasciencias.org/vol_1_num_1_22_art_triangulo.html)

**Referências**

1. Amorim, D. P. - Compêndio de Geometria, Volume 1 - Classes 1ª, 2ª e 3ª, 9ª Edição, Biblioteca Básica de Textos Didácticos de Matemática, SPM, Depósito legal 286438/04.
2. Baruk, S. (1992) - Dicionário de Matemática Elementar, Volume 2, Edições Afrontamento, ISBN: 972-36-0767-0, Depósito legal 227493/05.

**Autor**
João Nuno Tavares
Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

**Editor**
José Francisco Rodrigues
Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa