A hipótese de Riemann — 150 anos

José Carlos Santos

Em 1859, Bernhard Riemann, então com 32 anos, foi eleito para a Academia das Ciências de Berlim. Fazia então parte do regulamento daquela instituição que os novos membros deviam fazer um relatório sobre a pesquisa que estavam a fazer. O relatório entregue por Riemann era curto (foi publicado em oito páginas) e tinha por título *Sobre o número de números primos que não excedem uma grandeza dada*. É aqui que surge a hipótese de Riemann, que é talvez o mais famoso problema em aberto da Matemática.

$\zeta(n)$

Para compreender o problema, convém recuar a 1650, ano em que foi publicado o livro *Novæ quadraturæ arithmeticæ seu se additione fractionum*, de Pietro Mengoli. É um livro sobre soma de séries, duas das quais são

$$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

e

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

É aí demonstrado que a primeira (a série harmónica) diverge e o autor levanta o problema de saber qual é a soma da segunda. Este problema foi novamente levantado por Jacob Bernoulli em 1689.[1] Três anos mais tarde, o mesmo Jacob Bernoulli começa a estudar as séries

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots \tag{1}$$

para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

[1] O texto em questão foi publicado em Basileia, o que deu origem a designar-se por «problema de Basileia» o problema de determinar o valor de $\zeta(2)$.

Em 1735, Euler provou que $\zeta(2) = \pi^2/6$ e, pouco tempo depois, calculou $\zeta(n)$ para cada número natural par n, para além de ter obtido o produto euleriano

$$\zeta(n) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - p^{-n}\right)^{-1}, \tag{2}$$

o qual é válido para cada número real $n > 1$. Isto mostra que há uma relação entre a função ζ e a distribuição dos números primos. Não é a única ligação da função ζ à Teoria dos Números. Por exemplo, se $s > 1$, então

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s},$$

onde $d(n)$ é o número de divisores de n. Além disso, se $s > 2$, então

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s},$$

onde $\sigma(n)$ é a soma dos divisores de n.

Conjectura de Legendre

Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $\pi(x)$ o número de números primos menores ou iguais a x. Por exemplo, $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$ e $\pi(\pi) = 2$. No fim do século XVIII Legendre observou que aparentemente se tem

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{3}$$

querendo isto dizer que o quociente das duas funções tende para 1 quando x tende para $+\infty$. Pela mesma altura, Gauss (com apenas 15 ou 16 anos de idade) também conjecturou que se tem (3), mas também fez a conjectura equivalente

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt.$$

Que as duas conjecturas são equivalentes resulta de se ter

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x/\log(x)}{\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt} = 1,$$

que é algo que se prova facilmente. No entanto, $\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$ é uma melhor aproximação de $\pi(x)$ do que $x/\log(x)$ como se pode ver pela figura 1.

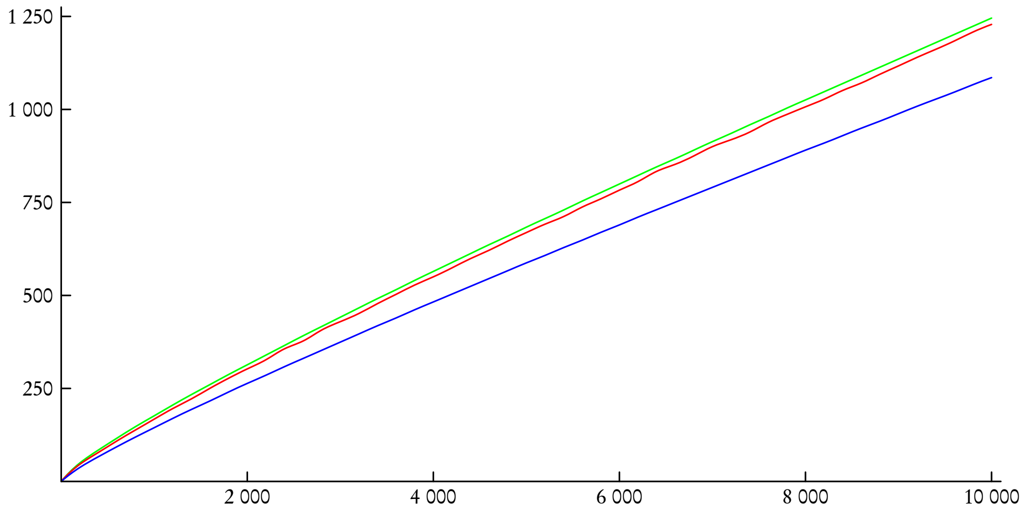

Figura 1: Gráficos de $\pi(x)$ (vermelho), $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ (verde) e $x/\log(x)$ (azul).

A figura 1 também sugere que $\pi(x)$ é sempre maior do que $x/\log(x)$ e que a diferença vai aumentando à medida que x cresce. Isto levou Legendre a conjecturar, em 1800, que uma função que aproxima $\pi(x)$ ainda melhor do que $x/\log(x)$ é

$$\frac{x}{\log(x) - 1{,}08366}.$$

Não é claro o que é que ele tinha em mente ao escrever isto, pois se o quociente de $\pi(x)$ por $x/\log(x)$ tender de facto para 1, então o quociente de $\pi(x)$ por qualquer função do tipo $x/(\log(x)+A)$ também tende para 1.

Gauss não publicou nada sobre este tópico; o que se sabe sobre as observações dele sobre o assunto vem nas suas cartas pessoais e no seu diário. Em contrapartida, a conjectura de Legendre era bem conhecida dentro da comunidade matemática e é mencionada por, pelo menos, Abel, Dirichlet e Čebišev na primeira metade do século XIX. Foi aliás Čebišev a primeira pessoa a fazer progressos em direcção a uma demonstração da conjectura. Em 1848 provou que

- para x suficientemente grande tem-se

$$0{,}89 \times \int_2^x \frac{1}{\log t} dt < \pi(x) < 1{,}11 \times \int_2^x \frac{1}{\log t} dt;$$

- num certo sentido (que ele precisou) nenhuma função da forma

$$x \mapsto \frac{x}{\alpha \log(x) + \beta}$$

aproxima melhor a função π do que ${}^{x}/_{(\log(x)-1)}$;

- caso o limite
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{1}{\log t}dt}$$
exista, então o seu valor só pode ser 1.

O artigo de Riemann

O artigo de Riemann não é um artigo de Matemática no sentido usual do termo. É sobretudo um programa de pesquisa que pretende levar a uma demonstração da conjectura de Legendre.

A expressão (1) para $\zeta(n)$ foi definida para valores naturais de $n > 1$. Naturalmente, definir $\zeta(n)$ daquele modo continua a fazer sentido para qualquer $n \in]1,+\infty[$. O que Riemann fez foi definir $\zeta(s)$ para qualquer número complexo s diferente de 1. A definição dele é complexa (sem trocadilhos!) mas vamos ver como se pode prolongar ζ ao conjunto dos números complexos s tais que $\mathrm{Re}(s) > 0$ (e com $s \neq 1$). Para começar, convém definir $n^s = e^{s\log(n)}$, para cada $s \in \mathbb{C}$. Não é difícil provar que

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \tag{4}$$

converge (e até converge absolutamente) quando $\mathrm{Re}(s) > 1$. No entanto, a série (4) diverge quando $\mathrm{Re}(s) \leqslant 1$. Por outro lado, se $\mathrm{Re}(s) > 1$ tem-se

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} + 2^{1-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} + 2^{1-s}\zeta(s).\end{aligned}$$

Logo,

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}}{1-2^{1-s}}. \tag{5}$$

Acontece que o numerador do membro da direita desta igualdade é uma série que converge sempre que $\operatorname{Re}(s) > 0$. Isto permite então definir $\zeta(s)$ para cada número complexo s com parte real positiva, excepto aqueles para os quais $2^{1-s} = 1$, ou seja, excepto os números s da forma $1 - \frac{2\pi i n}{\log 2}$, com $n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, se se definir

$$a_n = \begin{cases} -2 & \text{se } n \text{ for múltiplo de } 3 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

então cálculos semelhantes aos anteriores mostram que

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}}{1 - 3^{1-s}}. \tag{6}$$

Isto permite definir $\zeta(s)$ para cada número complexo s com parte real positiva, excepto os números s da forma $1 - \frac{2\pi i n}{\log 3}$, com $n \in \mathbb{Z}$. As expressões (5) e (6) em conjunto permitem definir $\zeta(s)$ para cada $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Riemann encontrou uma expressão analítica que permitia definir $\zeta(s)$ para cada $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. É natural que não se possa prolongar a 1, pois o limite de $|\zeta(s)|$ quando s tende para 1 por valores reais maiores do que 1 é $+\infty$. Isto tanto pode ser demonstrado a partir de (4) como (mais facilmente) a partir de (5).

Considerando agora ζ como uma função de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ em $\mathbb{C}$, Riemann mostrou facilmente que $\zeta(s) = 0$ quando s é um inteiro par menor do que 0 e observou que resulta do produto euleriano (2) que $\zeta(s)$ não tem zeros tais que $\operatorname{Re}(s) > 1$. Riemann também provou que, a não ser quando s ou $1 - s$ é um inteiro par menor do que 0, $\zeta(s) = 0$ se e só se $\zeta(1 - s) = 0$. Resulta disto tudo que, com excepção dos inteiros pares menores do que 0 (que se designam por *zeros triviais* da função ζ), todos os zeros da função ζ estão na *faixa crítica*: $\{ s \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Re}(s) \leqslant 1 \}$.

Prova-se facilmente que, para cada $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$. Em particular, se s for um zero da função ζ, então $\overline{s}$ também o é. Consequentemente, se se está à procura de zeros da função ζ basta procurar aqueles que têm parte imaginária maior ou igual a 0 e vão ser só estes que serão considerados a partir deste ponto.

Riemann fez uma estimativa de quantos zeros há na faixa crítica com parte imaginária entre 0 e T ($T > 0$) e obteve

$$\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}. \tag{7}$$

Em seguida, Riemann afirmou que este número também era uma estimativa para o número de zeros ρ situados na *recta crítica* $\{ 1/2 + ti \mid t \in \mathbb{R} \}$ tais que $0 \leqslant \operatorname{Im}(\rho) \leqslant T$. Foi neste contexto que formulou a sua famosa hipótese:

Todos os zeros não triviais da função ζ estão na recta crítica.

É natural nesta fase ocorrer uma pergunta. O que é que tudo isto tem a ver com a conjectura de Legendre? Até aqui, a única relação que foi vista entre a função ζ e números primos foi o produto euleriano (2). Para se ver a relação entre as duas coisas, considere-se a função de Möbius $\mu\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{-1,0,1\}$, assim definida: se $n \in \mathbb{N}$, então

- se n for múltiplo de algum quadrado perfeito maior do que 1, $\mu(n) = 0$;
- caso contrário, $\mu(n) = 1$ (respectivamente -1) caso n tenha um número par (resp. ímpar) de factores primos.

Seja também, para cada $x \in]1, +\infty[$,

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\log t} dt + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{1}{\log t} dt. \right)$$

Riemann conjecturou que

$$\mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}\left(\sqrt[5]{x}\right) + \frac{1}{6}\mathrm{Li}\left(\sqrt[6]{x}\right) + \cdots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}\left(\sqrt[n]{x}\right) \quad (8)$$

seria uma excelente aproximação de $\pi(x)$. Empiricamente isto é plausível; por exemplo, se $n(\in \mathbb{N}) \leqslant 1\,000\,000$, então a diferença entre $\pi(n)$ e a soma dos quatro primeiros termos não nulos da série (8) não excede 37. Para se ter uma ideia da ordem de grandeza dos números com que se está a trabalhar, basta ver que $\pi(1\,000\,000) = 78\,498$. Como $\mathrm{Li}(x)$ e $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ diferem por uma constante ($\simeq 1{,}04516$), há uma relação clara entre a aproximação de $\pi(x)$ que Riemann conjecturou e a conjectura de Legendre.

Convém observar que existe uma relação directa entre a função de Möbius e a função ζ: se $s \in \mathbb{C}$ e se $\mathrm{Re}(s) > 1$, então

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right) = 1. \quad (9)$$

Após Riemann

O artigo de Riemann estava tão avançado em relação ao seu tempo que tiveram de decorrer mais de trinta anos até haver avanços relativamente ao que lá vem. Só em 1896 é que Jacques Hadamard e Charles de la Vallée Poussin demonstraram (independentemente um do outro) a conjectura de Legendre, a qual passou a ser conhecida por *teorema dos números primos*. A demonstração envolveu o estudo dos zeros da função ζ, mas o que provaram foi somente que esta não tem zeros na fronteira da faixa crítica, ou seja, não tem zeros da forma it ou $1+it$ ($t \in \mathbb{R}$). Para se ter uma ideia da complexidade do estudo deste problema, basta ver o gráfico da restrição de $|\zeta|$ ao eixo dos imaginários puros, representado na figura 2. Até hoje, ninguém conseguiu provar que existe algum $\delta < 1/2$ tal que todos os zeros não triviais da função ζ estejam na faixa $\{ s \in \mathbb{C} \mid \delta < \operatorname{Re}(s) < 1-\delta \}$.

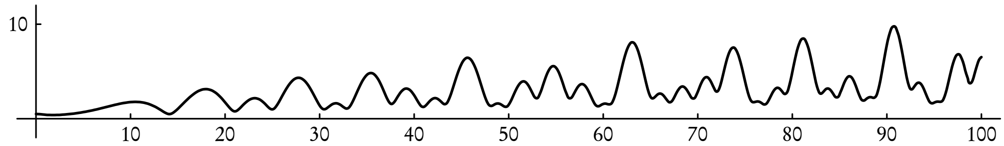

Figura 2: Gráfico de $t \mapsto |\zeta(ti)|$ ($t \in [0,100]$)

O artigo de Riemann continuou a ser fonte de inspiração para muitos matemáticos que trabalharam nesta área. Parte desse trabalho consistiu em encontrar as demonstrações de muitas afirmações aí feitas por Riemann as quais, aparentemente, eram por ele encaradas como estando completamente demonstradas. Um exemplo entre outros consiste na estimativa (7) apresentada por Riemann para o número de zeros da função ζ no rectângulo que tem por vértices 0, 1, $1+Ti$ e Ti ($T > 0$). Só em 1905 é que von Mangoldt conseguiu demonstrar que estava correcta.

Desde o fim do século XIX que se estudam por métodos numéricos os zeros da função ζ na faixa crítica. De facto, o próprio Riemann já fizera isso, mas não revelou esse facto no artigo de 1859. Foi somente em 1932 que Carl Ludwig Siegel publicou uma análise dos apontamentos de Riemann que estavam depositados na Universidade de Göttingen. Foi aí descoberta uma fórmula, actualmente conhecida por *fórmula de Riemann-Siegel*, que permite encontrar zeros da função ζ. Riemann chegou a usar essa fórmula para encontrar os três primeiros zeros da função ζ da forma $1/2 + ti$ ($t > 0$): correspondem a tomar-se $t \simeq 14{,}135$, $t \simeq 21{,}022$ e $t \simeq 25{,}011$. Levando essa análise um pouco mais longe, pode-se mostrar que não há mais zeros da função ζ na faixa crítica com parte imaginária positiva e menor ou igual ao maior dos três. Esta análise numérica aos zeros da função ζ foi levada cada vez mais longe ao longo dos anos; os primeiros dez zeros situados na faixa crítica podem ser vistos na figura 3. Conhecem-se actualmente biliões de zeros da função ζ situados na faixa crítica e têm todos parte real igual a $1/2$.

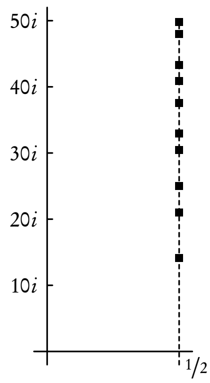

Figura 3: Os primeiros dez zeros não triviais da função ζ

Este tipo de verificações numéricas são provavelmente encaradas por muitas pessoas como uma prova, para todos os efeitos práticos, da hipótese de Riemann. Para se ver o cuidado que se deve ter com este tipo de «demonstrações», considere-se novamente a figura 1. Como se pode aí ver, tem-se sempre (i. e. sempre que $1 \leqslant x \leqslant 10\,000$) $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt > \pi(x)$. Como $\mathrm{Li}(x)$ é ligeiramente maior que $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ tem-se, por maioria de razão, que $\mathrm{Li}(x) > \pi(x)$. Será que a desigualdade $\mathrm{Li}(x) > \pi(x)$ se verifica para qualquer $x \geqslant 1$? De facto não; em 1914 Littlewood provou que há números x tais que $\mathrm{Li}(x) < \pi(x)$. No entanto, os números para os quais se tem esta desigualdade são tão grandes que nunca se encontrou nenhum.

Naturalmente, foram surgindo ao longo dos anos resultados teóricos cada vez mais precisos sobre os zeros da função Riemann. Por exemplo, em 1914 Hardy demonstrou que a função ζ tem uma infinidade de zeros na recta crítica. Sete anos mais tarde, Hardy e Littlewood demonstraram que existe algum número $K > 0$ tal que o número de zeros da função ζ no segmento que une $1/2$ a $1/2 + ti$ é maior de que Kt, desde que t seja suficientemente grande. Em 1942, Selberg provou que o mesmo é verdade se se tiver $Kt\log(t)$ em vez de Kt.

Outras formulações

A hipótese de Riemann é formulada em termos da localização dos zeros de uma função de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ em $\mathbb{C}$ cuja definição não é trivial. Felizmente, há outros enunciados equivalentes mais fáceis de compreender. Um deles é: a função

$$x \mapsto \frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{\sqrt{x}\log x}$$

é limitada. Outro enunciado equivalente pode ser obtido a partir da função de Möbius. É o seguinte: para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mu(k)}{n^{1/2+\varepsilon}} = 0.$$

Convém ver o que significa o numerador da expressão anterior. Diz-se que um número natural n é *livre de quadrados* se não for múltiplo de nenhum quadrado perfeito maior de que 1. Resulta da definição da função μ que, se $n \in \mathbb{N}$, então $\left|\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\right|$ é a diferença entre o número de naturais em $[1, n]$ livres de quadrados que têm um número par de factores primos e o número de naturais em $[1, n]$ livres de quadrados que têm um número ímpar de factores primos. Assim, por exemplo, há 13 números livres de quadrados menores ou iguais a 20:

$$\underline{1},\ 2,\ 3,\ 5,\ \underline{6},\ 7, \underline{10},\ 11,\ 13,\ \underline{14},\ \underline{15},\ 17,\ 19,$$

estando sublinhados aqueles que têm um número par de factores primos, que são 5 no total. Logo, $\left|\sum_{k=1}^{20} \mu(k)\right| = 3$. Um enunciado equivalente à hipótese de Riemann é: se $\varepsilon > 0$ e se $n \in \mathbb{N}$ for suficientemente grande, então $\left|\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\right| \leqslant n^{1/2+\varepsilon}$. Em 1897, Mertens propôs uma conjectura muito mais forte, a *hipótese de Mertens*:

$$\textit{Se } n \in \mathbb{N}, \textit{ então } \left|\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\right| \leqslant \sqrt{n}.$$

Durante muito tempo, todos os dados numéricos disponíveis apoiavam esta hipótese, mas, de facto, é falsa, o que só foi provado em 1985. No entanto, ainda não se conhece nenhum contra-exemplo à hipótese de Mertens, mas sabe-se que um tal contra-exemplo tem que ser maior do que 10^{14}.

Conclusão

Tudo o que foi escrito atrás deve explicar porque é que a hipótese de Riemann é um problema em aberto tão famoso. Desde que foi formulada que tem captado a imaginação de alguns dos maiores matemáticos de mundo. Conta-se, por exemplo, que o exemplar de Hurwitz das obras completas de Riemann tinha a lombada gasta de tal modo que se se deixasse caí-lo ele abria na página onde está formulada a hipótese. Outro matemático fascinado por ela foi André Weil, que declarou certa vez numa entrevista que, durante muito tempo, acalentou a ambição de a demonstrar e de publicar a demonstração em 1959, no centenário da publicação da hipótese. Mas aquele ano passou sem que ele tivesse tido sucesso. Depois, a sua ambição passou a ser somente a de compreender a demonstração quando alguém a publicasse. Perto do fim da vida, desejava somente que a demonstração fosse feita em vida dele, mas nem essa ambição foi satisfeita.

Convém dizer que uma conjectura formulada por Weil sobre os zeros de certas funções de uma variável complexa é análoga à hipótese de Riemann e foi demonstrada por Pierre Deligne em 1974. Este facto é frequentemente apresentado como um dos argumentos mais convincentes para a plausibilidade da hipótese de Riemann.

Em 1900, Hilbert fez uma palestra no Congresso Internacional de Matemáticos onde expôs uma lista de 23 problemas matemáticos particularmente importantes. É provavelmente a lista de problemas mais famosa da história da Matemática, mas no ano 2000 surgiu outra que tem rivalizado com a de Hilbert em termos de impacto mediático: é a lista dos problemas do milénio, do Instituto Clay de Matemática. Não admira que o único problema comum a ambas as listas seja a hipótese de Riemann.