



JOSÉ CARLOS SANTOS
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

PODE PROVAR-SE ALGO TÃO SIMPLES COMO O ABC?

Em 2012, o matemático japonês Shinichi Mochizuki afirmou ter demonstrado a Conjetura ABC. Será que o fez? Ninguém sabe.

A Conjetura ABC é um dos mais conhecidos e importantes problemas em aberto da matemática, e já foi abordada na *Gazeta de Matemática* [4]. Mas será que está mesmo em aberto?

A CONJETURA

Normalmente, começa-se por descrever esta conjetura com uma frase do género: “Sejam a, b e c três números naturais primos entre si e tais que $a + b = c$.” Pode parecer que há aqui alguma ambiguidade: dizer que a, b e c são primos entre si quer dizer que não há nenhum fator comum aos três maior do que 1? Ou significa mais do que isso, nomeadamente que quaisquer dois deles são primos entre si? De facto, uma vez que $a + b = c$, as duas interpretações têm o mesmo significado.

Dado um número natural $n > 1$, o seu radical, que se representa por $\text{rad}(n)$, é o produto dos fatores primos de n . Por exemplo:

- ▶ $\text{rad}(12) = 6$, visto que os fatores primos de 12 são 2 e 3;
- ▶ se n é primo, $\text{rad}(n) = n$;
- ▶ se $n \in \mathbb{N}$, $\text{rad}(10^n) = 10$, pois os únicos fatores primos de 10^n são 2 e 5 (seja qual for o valor de n).

Constata-se que, geralmente, (supondo que $a + b = c$ e que a, b e c são primos entre si) $c \leq \text{rad}(abc)$. Há exceções; por exemplo, se $a = 3, b = 125$ e $c = 128$, então

$$\text{rad}(abc) = \text{rad}(3 \times 5^3 \times 2^7) = 30 < 128 = c.$$

A Conjetura ABC tem a ver com as exceções a esta “regra”:

Conjetura ABC: Se $k \in]1, +\infty[$, há somente um número finito de tripletos (a, b, c) de números naturais primos entre si tais que $a + b = c$ e que $c > \text{rad}(abc)^k$.

Esta conjetura foi formulada por dois matemáticos na década de 80 do século passado: o britânico David Masser [2] e o francês Joseph Oesterlé [3].¹ Daí também ser conhecida por conjetura de Masser-Oesterlé.

A importância da Conjetura ABC foi abordada num texto publicado no Clube SPM por Miguel Abreu.² Terence Tao, que recebeu a Medalha Fields em 2006, expôs um argumento heurístico a favor da validade da conjetura no seu blogue *What’s new*.³

SHINICHI MOCHIZUKI

Este artigo não é relativo à Conjetura ABC em si própria, mas sim a um extraordinário evento que teve lugar em 2012 relativamente a uma sua eventual demonstração.

A 31 de agosto de 2012, o matemático japonês Shinichi Mochizuki divulgou pela Internet que tinha demonstrado a conjetura, tendo publicado a demonstração num conjunto de quatro textos com o título comum *Inter-universal Teichmüller theory*. É preciso acrescentar que a expressão “divulgou pela Internet” significa exactamente isso e não mais. Mochizuki não enviou os textos para nenhuma revista de matemática, a fim de ser revisto e, eventualmente, publicado. Pura e simplesmente, colocou-os na página

dele da Internet.

Não é a primeira vez que algo deste género tem lugar. Em 2002 e 2003, o matemático russo Grigory Perelman divulgou um conjunto de textos que continham uma demonstração de um famoso problema em aberto, a Conjetura de Poincaré.⁴ No entanto, não os enviou para nenhuma revista de matemática. Apesar disso, os textos foram analisados por outros matemáticos, a demonstração estava correta e, devido a isso, foi-lhe atribuída a Medalha Fields em 2006 (ou seja, no mesmo ano em que foi atribuída a Terence Tao), bem como um prémio de um milhão de dólares, atribuído pelo Instituto Clay de Matemática.

Há outro fator em comum entre os dois casos. Tanto Perelman como Mochizuki eram considerados matemáticos muitíssimo competentes pelos seus colegas antes de terem tido esta atitude. A carreira académica de Mochizuki é, de facto, impressionante por qualquer padrão.⁵ Terminou o ensino secundário (nos Estados Unidos) aos 16 anos, licenciou-se aos 19 (pela Universidade de Princeton) e doutorou-se aos 23, tendo-se tornado professor catedrático aos 33 anos. A qualidade dos seus trabalhos também é notável. O mais conhecido (antes da tentativa de demonstrar a Conjetura ABC) é a sua demonstração, aos 27 anos, da validade de uma outra conjetura, da autoria de Alexander Grothendieck. Dois anos mais tarde, foi orador convidado no Congresso Internacional de Matemáticos de 1998.

Sendo assim, como deve ser claro, Mochizuki não é nenhum maluquinho com veleidades a ser visto como um matemático... isto apesar de o próprio Mochizuki se descrever a si próprio na sua página da Internet, não como matemático mas sim como “inter geometra universal”.

Mas a demonstração dele é impenetrável! Isto não quer dizer somente que é impenetrável a quem não seja um matemático profissional. Isso não teria nada de estranho. O que acontece é que mesmo os colegas dele não a conseguem ler. Um destes, o professor Johan de Jong, da Universidade de Columbia, afirmou: “Os outros artigos dele – são legíveis. Consigo compreendê-los e são fantásticos.” Mas nem o professor de Jong consegue entrar no mundo que Mochizuki construiu para fazer a sua demonstração, nem, aparentemente, mais ninguém.

É preciso dizer que só o tamanho dos artigos assusta. Inicialmente, já tinham mais de 500 páginas no total. Atualmente (os textos foram revistos pelo autor) já ultrapassam as 600. E são 600 páginas cheias de conceitos novos e explorados.

Além disso, o comportamento de Mochizuki relativamente ao seu próprio trabalho é, no mínimo, pouco ortodo-

xo. Como é natural, dados o currículo dele e a importância da conjetura, Mochizuki já recebeu diversos convites de universidades de todo o mundo para expor as suas ideias, facilitando assim uma troca de ideias com os seus colegas. E ele recusou todos esses convites sempre que envolveram viagens para fora do Japão [1]. Essa atitude causa, naturalmente, algum ressentimento. Como disse Cathy O’Neil (matemática, esposa de de Jong e autora do blogue *mathbabe*⁶), “uma pessoa não se limita a dizer que demonstrou algo sem o ter explicado. Uma demonstração é uma construção social. Se a comunidade [matemática] não a compreende, é porque o trabalho não está bem feito.” Esta é, talvez, a posição maioritária, mas Mochizuki também tem quem o defenda. O seu colega Minhyong Kim, da Universidade de Oxford, justificou o comportamento atrás descrito com o facto de Mochizuki ser simultaneamente uma pessoa um tanto tímida e, ao mesmo tempo, muito trabalhadora, que não está para perder tempo em hotéis e em viagens de avião.

A comunidade matemática terá de aguardar por novos desenvolvimentos até se sair deste impasse.

REFERÊNCIAS

D. Castelvecchi, “The biggest mystery in mathematics: Shinichi Mochizuki and the impenetrable proof”, *Nature* 526, N° 7572. <https://www.nature.com/news/the-biggest-mystery-in-mathematics-shinichi-mochizuki-and-the-impenetrable-proof-1.18509>

D. W. Masser, *Open problems*. In: W. W. L. Chen (ed.): *Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory*. London: Imperial College, 1985

J. Oesterlé, *Nouvelles approches du “théorème” de Fermat*, Astérisque 161–162, 1988

M. Silva e P. J. Freitas, “A Conjetura ABC”, *Gazeta de Matemática* 174, (Nov. 2014), pp. 41–42

¹ Nota pessoal: o autor deste texto estava presente quando Joseph Oesterlé anunciou a sua Conjetura, num seminário Bourbaki.

² “A Conjetura ABC”, <https://clube.spm.pt/news/14611>

³ “The probabilistic heuristic justification of the ABC conjecture”, <https://terrytao.wordpress.com/2012/09/18/the-probabilistic-heuristic-justification-of-the-abc-conjecture/>

⁴ Provada uma conjetura matemática com mais de cem anos, <http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/destaque/provada+uma+conjectura+matematica+com+mais+de+cem+anos>

⁵ Estas e outras informações foram retiradas do texto “The Paradox of the Proof” <http://projectwordsworth.com/the-paradox-of-the-proof/>

⁶ <https://mathbabe.org/>