TRIGONOMETRIA NA ANTIGA BABILÓNIA?

José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

Terá a trigonometria sido criada na antiga Babilónia, séculos antes de ser reinventada na antiga Grécia?

Não é vulgar a História da Matemática ser notícia, mas este verão foi isso que aconteceu. Por exemplo, uma notícia do *Observador*,[1] publicada a 25 de agosto, teve por título "Desvendado enigma matemático com 3700 anos" e começava por:

> "A análise de uma tabela trigonométrica com cerca de 3.700 anos leva a crer que os matemáticos da Babilónia já estudavam trigonometria muito antes dos gregos."

Este jornal limitou-se a fazer eco do que muitos outros meios de comunicação social fizeram nos mais diversos países. Por exemplo, o *The Telegraph* publicou também uma notícia sobre este tópico.[2]

Na origem disto, encontra-se o artigo [2], publicado numa revista de História da Matemática chamada, muito apropriadamente, *Historia Mathematica*. Antes de descrever o artigo, convém fazer uma introdução à Matemática da Babilónia.

O período histórico que nos interessa aqui situa-se entre os anos 1830 a.C. e 1530 a.C., aproximadamente. A Matemática desenvolvida nesta época na Babilónia (ou Mesopotâmia) tem muitos aspetos fascinantes, que podem ser vistos em [3]. Para começar, há o sistema de numeração empregue. Tratava-se de um sistema de numeração posicional em base 60, cuja influência ainda se nota nos nossos dias: é por causa dele que dividimos cada grau e cada hora em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos.

Outro aspeto interessante da Matemática na Babilónia é o meio físico usado para a preservar. Os textos eram escritos em placas de barro, que depois eram cozidas. Este material é bastante resistente e centenas de placas desse tipo foram descobertas em escavações desde meados do século XIX. Aquela que é talvez a mais famosa de todas e que é também a que é a fonte de toda a recente agitação é a que se pode ver na figura 1, conhecida por Plimpton 322.

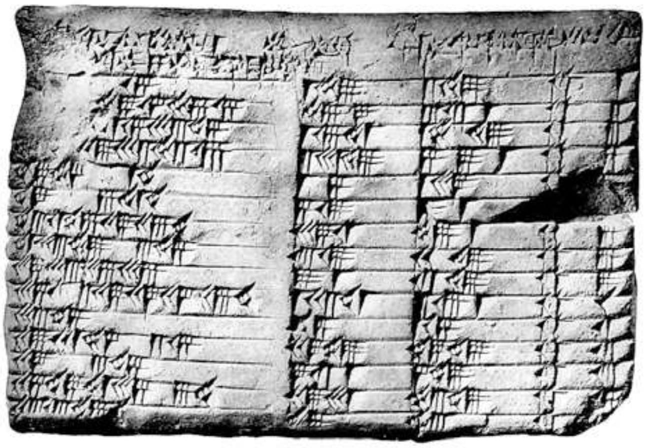

Figura 1. Placa de barro Plimpton 322.

[1] http://observador.pt/2017/08/25/desvendado-enigma-matematico-com-3--700-anos/

[2] http://www.telegraph.co.uk/science/2017/08/24/3700-year-old-babylonian--tablet-rewrites-history-maths-could/

O seu nome tem origem em George Arthur Plimpton, um editor norte-americano que a comprou a um arqueólogo em 1922. Tem o tamanho aproximado de um postal: 127 mm de comprimento por 88 mm de largura. Além disso, tem cerca de 2 cm de espessura. Aquilo que a placa contém foi descrito no artigo [4], publicado em 1945.

E aquilo que a placa contém são 15 linhas de números (antecedidas de uma linha com nomes das colunas), distribuídos por quatro colunas. A quarta está presente unicamente para numerar as linhas (contém os números de 1 a 15, por esta ordem). O que realmente interessa são as três primeiras colunas. Comecemos pela segunda e pela terceira. As três primeiras linhas destas duas colunas podem ser vistas na tabela 1.

Tabela 1. Extrato da placa Plimpton 322

119	169
3367	4825
4601	6649
...	...

E o que é que são estes números? À partida, parecem números naturais aleatórios, tirando o facto de o da direita ser sempre maior do que o da esquerda. Por esta amostra, poderia parecer que os números de cada coluna estão dispostos por ordem crescente, mas não é assim em geral, pois, por exemplo, os números da quinta linha são 65 e 97. Além disso, os números da quarta linha (12709 e 18541) são os maiores de todos.

Há aqui uma regra escondida, que se revela ao elevarmos o número da direita ao quadrado e lhe subtrairmos o quadrado do da esquerda:

- $169^2 - 119^2 = 14.400 = 120^2$;
- $4.825^2 - 3.367^2 = 11.943.936 = 3.456^2$;
- $6.649^2 - 4.601^2 = 23.040.000 = 4.800^2$

e assim por diante. O que se passa é que os números da segunda coluna são "catetos" e os da terceira coluna são "hipotenusas" de tripletos pitagóricos, ou seja, de tripletos (a,b,c) de números naturais tais que $a^2 + b^2 = c^2$. De facto, é mais preciso do que isto: o número da segunda coluna é sempre o cateto mais curto de um tal tripleto pitagórico (como em cada um dos exemplos que vimos).

Há outra regra oculta nestes números, que se torna clara ao decompormos em fatores primos os catetos longos dos tripletos pigagóricos envolvidos. Ao fazermos isto aos três primeiros, obtemos:

- $120 = 2^3 \times 3 \times 5$;
- $3.456 = 2^7 \times 3^3$;
- $4.800 = 2^6 \times 3 \times 5^2$.

O leitor está a ver o que há em comum nestas decomposições? Não? Então continuemos. O cateto longo da quarta linha é

$$\sqrt{18.541^2 - 12.709^2} = 13.500 = 2^2 \times 3^3 \times 5^5.$$

Como já foi referido, há um caso no qual o cateto curto tem o valor 65 e a hipotenusa tem o valor 97; nesse caso, o cateto longo vale $72 = 2^3 \times 3^2$.

O que há em comum a todos os catetos longos é o facto de os seus fatores primos serem sempre 2, 3 ou 5. E qual é a importância disto? Acontece que, como já foi referido, na Babilónia os cálculos eram feitos em base 60 e os fatores primos de 60 são 2, 3 e 5. Resulta daí que as frações irredutíveis m/n que podem ser representadas em base 60 com somente um número finito de algarismos são precisamente aquelas para as quais n não tem nenhum fator primo além de 2, 3 e 5, da mesma maneira que, em base 10, as frações irredutíveis que podem ser representadas com somente um número finito de algarismos são aquelas para as quais n não tem nenhum fator primo além de 2 e 5.

Passemos à primeira coluna. O que esta contém é passível de ser interpretado de diversas maneiras. Uma delas é a seguinte: se estamos a falar de um tripleto pitagórico (c,l,h), onde c é o cateto curto, l é o cateto longo e h é a hipotenusa, então a primeira coluna contém o número c^2/l^2. Outra interpretação é a seguinte: contém o número $h^2/l^2 (= 1 + c^2/l^2)$. Em qualquer dos casos, os números da coluna da esquerda estão dispostos por ordem decrescente, sendo o maior 0,9834028 e o menor 0,3871605 (na primeira das interpretações atrás mencionadas; para passar para a segunda, basta adicionar 1 a cada número).

Repare-se que os valores dos números fracionários do parágrafo anterior são somente aproximadas, *mas são exatos no sistema de numeração da Babilónia*, precisamente por se estar em cada caso a dividir por um número que não tem outros fatores primos além de 2, 3 e 5.

Antes de passarmos ao artigo que criou toda esta agitação, há um aspecto lateral que convém comentar. O texto do *Observador* atrás mencionado contém esta passagem:

> "Segundo os investigadores, existem evidências de que o povo da Babilónia conhecia a famosa equação de Pitágoras (em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual

à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos), muito antes de o grego lhe ter dado o nome."

É difícil errar tanto em tão pouco espaço. Vejamos:

▶ Segundo os investigadores, o que existem são provas. "Evidência" é a qualidade de ser evidente e também pode ser considerado uma noção clara ou uma certeza manifesta, o que não é o caso aqui. Naturalmente, o que houve aqui foi uma má tradução para português do termo *evidence.*

▶O artigo original usa a designação tradicional para o teorema de Pitágoras e não a expressão "equação de Pitágoras".

▶Quem lê o texto do *Observador* pode ficar com a impressão de que isto (ou seja, o teorema de Pitágoras ser anterior a este) é uma descoberta nova. De facto (como os autores do artigo deixam claro), é algo que já é aceite há décadas que o chamado teorema de Pitágoras já era conhecido na antiga Babilónia, cerca de um milénio antes de Pitágoras ter sequer nascido. Este conhecimento provém do estudo de outras placas de barro da Babilónia, além da Plimpton 322.[3]

Os autores do artigo, Daniel Mansfield e Norman J. Wildberger, divulgaram no *YouTube* filmes relativos a este assunto. Um deles é bastante curto e só surge aí o primeiro autor.[4] Há outros, mais longos, no canal do *YouTube* do segundo autor.[5] Ambos são professores na Universidade de Nova Gales do Sul, na Austrália.

E o que é que eles defendem relativamente à placa Plimpton 322? Defendem uma ideia, que não é nova, segundo a qual a placa é uma tabela trigonométrica.[6] Esta ideia já fora sugerida no texto original de Neugebauer e Sachs [4]; veja-se também [1, § 2.2], embora o autor deste texto favoreça a ideia de que a placa Plimpton 322 tem um significado aritmético e não trigonométrico.

Mansfield e Wildberger defendem que a tabela Plimpton 322 é uma tabela trigonométrica, mas de um tipo de trigonometria fundamentalmente distinto do atual. A trigonometria, tal como a conhecemos actualmente, está intimamente ligada à noção de ângulo. Wildberger e Mansfiled apresentam a ideia de que a trigonometria que se manifesta nesta tabela tem origem na relação entre os comprimentos dos lados e das diagonais de retângulos. Considere-se, por exemplo, o retângulo da figura 2, o qual tem 72 unidades de comprimento, 65 unidades de largura e cuja diagonal tem 97 unidades de comprimento. Isto corresponde a uma das linhas da Plimpton 322, aquela na qual surgem os números 65 na segunda coluna e 97 na terceira.

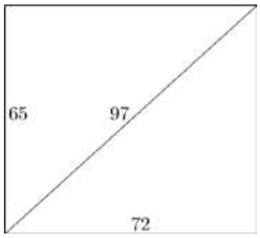

Figura 2. Retângulo com diagonal.

Não há nada de errado na ideia de que a trigonometria (ou qualquer outro ramo da matemática) tenha tido, noutra época e noutra cultura, uma abordagem radicalmente diferente da atual. Pelo contrário, é frequentemente um obstáculo tentar compreender a matemática de outra era impondo a nossa maneira de ver as coisas. No entanto, convém que se apresentem provas de que a nova interpretação está correta, e isso não é algo que os autores façam.

Outro aspecto negativo do artigo de Mansfield e Wildberger está no que têm a dizer sobre números e, mais precisamente, sobre a exatidão dos cálculos a que fazem referência.[7] É impressionante constatar a quantidade de vezes que os autores mencionam este aspeto. Por exemplo, escrevem que, caso a interpretação deles esteja correta, a tabela Plimpton 322 é "única devido à sua natureza exata, a qual faria dela a única tabela trigonométrica do mundo *totalmente precisa*" (com o itálico no texto original). O que é que eles querem dizer com isto? O que se passa é que a tabela está construída, como já foi referido, de maneira a que todos os quocientes que surgem na primeira coluna tenham denominadores cujos únicos fatores primos sejam 2, 3 e 5, o que faz com que se possam exprimir em base 60 com somente um número finito de algarismos. Observe-se que, uma vez que para isto só interessam os fatores primos da base, o resultado seria exatamente o mesmo se trabalhássemos em base 30 e não em base 60.

[3] *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html*

[4] *https://www.youtube.com/watch?v=i9-ZPGp1AJE*

[5] *https://www.youtube.com/user/njwildberger*

[6] *https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html*

[7] Algumas das observações que se seguem também foram feitas no blogue "Roots of Unity" da *Scientific American*; veja-se *https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/dont-fall-for-babylonian-trigonometry-hype/*

E se continuarmos a trabalhar em base 10? Não poderemos construir uma tabela trigonométrica análoga, na qual os catetos longos dos triângulos pitagóricos não tenham outros fatores primos além de 2 e de 5? A resposta é afirmativa; o preço a pagar, por asim dizer, é que os números com que teremos de trabalhar serão bastante maiores. Mas isso é o que acontece sempre que se passa de uma base para outra: algumas coisas ficam mais fáceis e outras ficam mais difíceis.

Além disso, o facto de trabalharmos com frações cuja expansão em base 60 só exige um número finito de algarismos também tem um preço: é que os ângulos dão saltos irregulares, ao contrário de uma tabela trigonométrica tradicional, onde se podem ver, por exemplo, os valores de $\tan 1^\circ$, $\tan 2^\circ$, $\tan 3^\circ$, e assim sucessivamente. Podemos então optar entre trabalhar somente com números que se podem exprimir com um número finito de algarismos ou trabalhar com os ângulos uniformemente espaçados. Mais uma vez, cada opção tem vantagens e desvantagens relativamente à outra, embora, com a facilidade atual de acesso a computadores que fazem cálculos com uma enorme rapidez, seja difícil que, na prática, se possa defender a primeira opção.

Por vezes, é difícil levar a sério as afirmações dos autores. Por exemplo, no vídeo curto acima mencionado onde aparece somente Daniel Mansfield é afirmado que, em base 10, só há duas frações exatas: $1/2$ e $1/5$. Isto é um disparate. Não há nada de inexato em $1/3$. O que se passa é que, contrariamente a $1/2$, por exemplo, $1/3$ não se pode exprimir, em base 10, sob a forma $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ usando somente um número finito de algarismos. E, com efeito, em base 60 já não há esse problema. Mas o que é perturbador aqui é a afirmação de que $1/2$ e $1/5$ são as *únicas* frações bem-comportadas (neste sentido) relativamente à base 10. Então $1/4$? Ou $1/8$? No vídeo referido, ao mencionarem as frações que podem ser escritas em base 60 com somente um número finito de algarismos, aí já são referidas $1/4$ e $1/8$. A dualidade de critério é bastante óbvia e chocante.

Deve ser aqui referido que o segundo autor, Norman J. Wildberger, é muito crítico do uso do infinito em matemática. Por exemplo, no prefácio do seu livro *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*[8], Wildberger afirma (pág. xv) que a teoria aí exposta "une as três áreas nucleares da Matemática – Geometria, Teoria dos Números e Álgebra – e expulsa a Análise e os processos infinitos das bases do assunto". Também defende aí (págs. 22–23) que há graves problemas lógicos por resolver relativamente ao conceito de número decimal (que o autor define como sendo os números que têm uma "expansão decimal especificada por um algoritmo, um programa de computador ou uma função") e, por maioria de razão, ao conceito de número real. Assim, não admira que as ideias defendidas no artigo em questão encaixem como uma luva na sua visão da matemática.

Para terminar, recomendo ao leitor a leitura do artigo [5][9] para ter uma visão sóbria e bem fundamentada relativamente à placa Plimpton 322, curiosamente também publicado na *Historia Mathematica*.

REFERÊNCIAS

[1] R. Calinger, *A contextual history of Mathematics to Euler*, Prentice Hall, 1999.

[2] D. F. Mansfield e N. J. Wildberger, "Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry", *Historia Mathematica* (no prelo), *https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001*.

[3] O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover, 1957.

[4] O. Neugebauer e A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, Amer. Oriental Series 29, 1945, pp. 38–41.

[5] E. Robson, "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322", *Historia Mathematica* 28, nº 3, pp.167–206, 2001.

[8] *http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/book.htm*

[9] *http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086001923171*