Análise Complexa – Resolução de alguns exercícios do capítulo 4

Exercício nº1

1. Caso de $C(0,0,1)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-i)} &= \frac{i}{z^2}\frac{1}{1+iz} \\ &= iz^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n \text{ porque } |-iz|<1 \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{n+1}z^{n-2} \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty}-(-i)^{n+3}z^n.\end{aligned}$$

Caso de $C(0,1,+\infty)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-i)} &= \frac{i}{z^2}\frac{1}{1+iz} \\ &= iz^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(-iz)^n} \text{ porque } |-iz|>1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{1-n}z^{-n-2} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}(-i)^{3-n}z^{-n}.\end{aligned}$$

2. Comece-se por decompor a fracção racional $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ em fracções simples. Tem-se

$$\begin{aligned}&(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1,2\}):\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}\iff \\ &\iff(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1,2\}):\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{(A+B)z-2A-B}{(z-1)(z-2)} \\ &\iff\begin{cases}A+B=0\\-2A-B=1\end{cases} \\ &\iff A=-B=-1,\end{aligned}$$

pelo que

$$(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1,2\}):\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

e, portanto,

$$(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,2\}):\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}+\frac{1}{1-z}\right).$$

Caso de $C(0,0,1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}+\frac{1}{1-z}\right)\\
&= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\ \text{(pois } |z/2|,|z|<1\text{)}\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}\\
&= \sum_{n=-1}^{\infty}(1-2^{-n-2})z^n.
\end{aligned}$$

Caso de $C(0,1,2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}+\frac{1}{1-z}\right)\\
&= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n\right)\ \text{(pois } |z/2|<1<|z|\text{)}\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^{n-1}\\
&= \sum_{n=-1}^{\infty}-\frac{z^n}{2^{n+2}}+\sum_{n=-\infty}^{-2}z^n.
\end{aligned}$$

Caso de $C(0,2,+\infty)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}+\frac{1}{1-z}\right)\\
&= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n\right)\ \text{(pois } 1<|z/2|,|z|\text{)}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1-2^{-n-2})z^n.
\end{aligned}$$

3. $(\forall z\in\mathbb{C}^*):\ \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}=z^{-4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{(2z)^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{2^n}{n!}z^{n-4}=\sum_{n=-3}^{+\infty}-\frac{2^{n+4}}{(n+4)!}z^n.$

4. Caso de $C(0,1,+\infty)$: Se $|z|>1$, então, pelo exercício 26.3 do segundo capítulo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)^n} &= \frac{z^{-n}}{(1-z^{-1})^n}\\
&= z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n-1}z^{-m}\\
&= \sum_{m=-\infty}^{-n}\binom{-m-1}{n-1}z^m.
\end{aligned}$$

Caso de $C(1,0,+\infty)$: Obviamente, tem-se $\dfrac{1}{(z-1)^n}=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m(z-1)^m$ se se definir $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ por $a_m=1$ se $m=-n$ e $a_m=0$ caso contrário.

5. Se $z \in C(1,0,+\infty)$, então

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{z}{z-1}\right) &= \operatorname{sen}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\\ &= \operatorname{sen}(1)\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)+\cos(1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sen}(1)}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(1)}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{0}a_n(z-1)^n\end{aligned}$$

com

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_-) : a_n = \begin{cases}(-1)^k\operatorname{sen}(1)/n! & \text{se } n=-2k \text{ para algum } k\in\mathbb{Z}_+\\ (-1)^k\cos(1)/n! & \text{se } n=-2k-1 \text{ para algum } k\in\mathbb{Z}_+.\end{cases}$$

6. $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : \dfrac{1}{e^{1/z}} = e^{-1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^n}{(-n)!}z^n.$

Exercício nº3

Seja K um compacto de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, seja $M=\sup_{z\in K}|z|$ e seja $N\in\mathbb{N}$ tal que $N>M$. Para cada número natural $n\geq N$, tem-se

$$\frac{1}{|z-n|^2}\leq\frac{1}{(n-|z|)^2}\leq\frac{1}{(n-M)^2}\,.$$

Então, pelo teste M de Weierstrass, a série $\sum_{n=N}^{\infty}(z-n)^{-2}$ converge uniformemente em K, pelo que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(z-n)^{-2}$ também converge uniformemente em K. Mostra-se de maneira análoga que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(z+n)^{-2}$ converge uniformemente em cada compacto K de $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$.

1. Para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, sejam

$$f(z)=\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2\pi z}\quad\text{e}\quad g(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}\,.$$

Se $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned}g(z+1) &= \frac{1}{(z+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1-n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1+n)^2}\\ &= \frac{1}{(z+1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}\\ &= g(z);\end{aligned}$$

por outras palavras, g é periódica de período 1. Observe-se que g é uma função analítica, pelo teorema da convergência uniforme de Weierstrass.

Tem-se

$$\operatorname{ord}\left(0,\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2\pi z}\right)=-2\operatorname{ord}(0,\operatorname{sen}\pi z)=-2\operatorname{ord}(0,\pi z-(\pi z)^3/6+\cdots)=-2,$$

pelo que o desenvolvimento de Laurent da função f em $D(0,1)\setminus\{0\}$ é da forma

$$\sum_{n=-2}^{\infty}a_nz^n.$$

Além disso, $a_n = 0$ quando n é ímpar, pelo exercício anterior. Por outro lado,

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} z^2 \sum_{n=-2}^{\infty} a_n z^n = \lim_{z\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} z^n = a_{-2}.$$

Mas então

$$\begin{aligned} a_{-2} &= \lim_{z\to 0} z^2 \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} \\ &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{\pi z}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2 \\ &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{1 - (\pi z)^2/3! + (\pi z)^4/5! - (\pi z)^6/7! + \cdots}\right)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como o desenvolvimento de Laurent da função f na vizinhança de 0 é da forma $z^{-2} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$, 0 é ponto regular da função

$$\begin{array}{rcc} \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) - z^{-2}. \end{array}$$

Mas 0 também é ponto regular da função

$$\begin{array}{rcc} \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}, \end{array}$$

pelo que 0 é ponto regular de $f - g$. Como $f - g$ é uma função periódica de período 1, deduz-se que qualquer inteiro é ponto regular de $f - g$. Logo, $f - g$ é prolongável a uma função analítica $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Quer-se mostrar que h é a função nula. Vai-se começar por ver que é constante; para tal, basta mostrar que é limitada, pelo teorema de Liouville. Como h é periódica de período 1, basta provar que a sua restrição a $H = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 1/2\}$ é limitada. De facto, como a restrição de h a $\{z \in H : |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ é limitada (pois h é contínua e trata-se de um conjunto compacto), basta provar que as restrições de h a $H_+ = \{z \in H : \operatorname{Im} z > 1\}$ e a $H_- = \{z \in H : \operatorname{Im} z < -1\}$ são limitadas e, para tal, basta provar que as restrições de f e de g àqueles conjuntos são limitadas. Vai-se fazer isto unicamente para H_+, pois a caso de H_- é análogo.

Vai-se começar pela função f. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $|x| \leq 1/2$ e $|y| > 1$. Então, pelo exercício 59 do segundo capítulo,

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(\pi(x+yi))|^2 &= |\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi y i) + \cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi y i)|^2 \\ &= |\operatorname{sen}(\pi x)\cosh(\pi y) + i\cos(\pi x)\operatorname{senh}(\pi y)|^2 \\ &= \operatorname{sen}^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \cos^2(\pi x)\operatorname{senh}^2(\pi y) \\ &= \operatorname{sen}^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + (1 - \operatorname{sen}^2(\pi x))\operatorname{senh}^2(\pi y) \\ &= \operatorname{sen}^2(\pi x) + \operatorname{senh}^2(\pi y) \\ &\geq \operatorname{senh}^2(\pi y); \end{aligned}$$

consequentemente, se $z \in H_+$ tem-se

$$|f(z)| \leq \frac{\pi^2}{\operatorname{senh}^2(\pi \operatorname{Im} z)} \leq \frac{\pi^2}{\operatorname{senh}^2(\pi)}\,. \tag{1}$$

Vejamos agora o que se passa com a função g. Sejam x e y como acima. Tem-se

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z-n|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2+y^2}\,.$$

Considere-se a função

$$\begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{(t-x)^2+y^2}; \end{array} \tag{2}$$

trata-se de uma função estritamente decrescente e tem-se então

$$(\forall n\in\mathbb{N}) : \int_n^{n+1}\frac{1}{(t-x)^2+y^2}dt \geq \frac{1}{(n+1-x)^2+y^2},$$

pelo que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2+y^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{(t-x)^2+y^2}dt = \int_1^{+\infty}\frac{1}{(t-x)^2+y^2}dt. \tag{3}$$

Mas um cálculo simples revela que uma primitiva da função (2) é a função de $[1,+\infty[$ em $\mathbb{R}$ que a cada t associa $\arctan((t-x)/y)/y$, pelo que se deduz de (3) que

$$(\forall z\in H_+) : \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}\right| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1-\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}\right)\right) < \frac{\pi}{2\operatorname{Im} z}.$$

O mesmo tipo de cálculos mostra que

$$(\forall z\in H_+) : \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}\right| < \frac{\pi}{2\operatorname{Im} z},$$

pelo que

$$(\forall z\in H_+) : |g(z)| < \frac{\pi}{\operatorname{Im} z} + \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z+1|^2} \leq \frac{\pi}{\operatorname{Im} z} + \frac{3}{(\operatorname{Im} z)^2}\,. \tag{4}$$

Está então provado que as restrições de f e de g ao conjunto H_+ são funções limitadas e, consequentemente, que a função h é limitada. Como foi observado acima, deduz-se então do teorema de Liouville que h é constante. Mas deduz-se de (1) e de (4) que

$$\lim_{y\to+\infty}|h(iy)| = 0,$$

pelo que h é a função nula.

Finalmente, para demonstrar a segunda igualdade do enunciado, baste ver que se tem, quando $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2} &= \frac{1}{z^2} + \lim_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(z-n)^2} + \lim_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(z+n)^2} \\ &= \lim_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(z+n)^2}\,. \end{aligned}$$

2. Sejam, para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$,

$$F(z) = \pi\cot\pi z \quad \text{e} \quad G(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right).$$

Sejam também f e g como na resolução anterior. Um cálculo simples revela que $F' = -f$. Por outro lado, o mesmo tipo de cálculos efectuados na resolução anterior mostra que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

convergem uniformemente em cada compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Logo, pelo teorema da convergência uniforme de Weierstrass,

$$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) : G'(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{(z+n)^2} = -g(z).$$

Isto mostra que $(F-G)' = -f + g \equiv 0$, pelo que $F - G$ é constante. Mas $F - G$ também é uma função ímpar, pelo que apenas pode ser a função nula.

Finalmente, veja-se que se tem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z-n} \\
&= \frac{1}{z} + \lim_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z-n} \\
&= \lim_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n} \,.
\end{aligned}$$

3. Tem-se, por um lado

$$\lim_{z\to 0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\left(\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} - \frac{1}{z^2}\right) &= \lim_{z\to 0} \frac{\pi^2 z^2 - \operatorname{sen}^2 \pi z}{z^2 \operatorname{sen}^2 \pi z} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{\pi^2 z^2 - \left(\pi z - (\pi z)^3/3! + \cdots\right)^2}{z^2\left(\pi z - (\pi z)^3/3! + \cdots\right)^2} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(\pi z)^2 - \left((\pi z)^2 - (\pi z)^4/3 + 2(\pi z)^6/45 - \cdots\right)}{z^2\left((\pi z)^2 - (\pi z)^4/3 + 2(\pi z)^6/45 - \cdots\right)} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(\pi z)^4/3 - 2(\pi z)^6/45 + \cdots}{\pi^2 z^4 - \pi^4 z^6/3 + 2\pi^6 z^8/45 - \cdots} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{\pi^4/3 - 2\pi^6 z^2/45 + \cdots}{\pi^2 - \pi^4 z^2/3 + 2\pi^6 z^4/45 - \cdots} \\
&= \frac{\pi^2}{3} \,.
\end{aligned}$$

Pela primeira igualdade da primeira alínea, os dois limites acima calculados têm o mesmo valor, pelo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

Exercício nº4

1. Uma vez que $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : z = \cdots + 0.z^{-1} + 0.1 + 1.z + 0.z^2 + 0.z^3 + \cdots$, $\operatorname{ord}(0, f) = 1$ e $\operatorname{res}(0, f) = 0$.

2. Uma vez que $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : z^{-1} = \cdots + 0.z^{-2} + 1.z^{-1} + 0.1 + 0.z + 0.z^2 + \cdots$, $\operatorname{ord}(0, f) = -1$ e $\operatorname{res}(0, f) = 1$.

3. Uma vez que $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : (z + z^{-1})/2 = \cdots + 0.z^{-2} + \frac{1}{2} \cdot z^{-1} + 0.1 + \frac{1}{2} \cdot z + 0.z^2 + \cdots$, $\operatorname{ord}(0, f) = -1$ e $\operatorname{res}(0, f) = 1/2$.

4. Tem-se $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : \cos(z^{-1}) = 1 - \frac{1}{2!} z^{-2} + \frac{1}{4!} z^{-4} - \frac{1}{6!} z^{-6} + \cdots$, pelo que $\operatorname{ord}(0, f) = -\infty$ e $\operatorname{res}(0, f) = 0$.

5. Tem-se $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : z^{-1} \operatorname{sen}(z) = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \cdots$, pelo que $\operatorname{ord}(0, f) = 0$ e $\operatorname{res}(0, f) = 0$.

6. Se $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ são tais que $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$, então $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : f(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}$, pelo que $\operatorname{ord}(0, f) = -n$ (pois, uma vez que P tem grau n, $a_n \neq 0$) e $\operatorname{res}(0, f) = a_{-1}$.

Exercício nº6

Se f possuir uma primitiva, então, pelo corolário 3.1.1, o integral de f ao longo de qualquer lacete (com valores em $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$) é igual a 0. Sejam então $r' \in]0, r[$ e $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ o lacete definido por $\gamma(t) = z_0 + r' e^{it}$. Então, pelo teorema de Laurent,

$$0 = \int_\gamma f = 2\pi i \operatorname{res}(z_0, f) \operatorname{ind}(z_0, \gamma) = 2\pi i \operatorname{res}(z_0, f),$$

pelo que $\operatorname{res}(z_0, f) = 0$.

Reciprocamente, se $\operatorname{res}(z_0, f) = 0$, então, novamente pelo teorema de Laurent, o integral de f ao longo de qualquer lacete (com valores em $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$) é igual a 0, pelo que, pelo teorema 3.2.7, f tem uma primitiva.

Exercício nº7

Se $a \in Z$ e $|z| = 1$, então $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1$, pelo exercício 8 do primeiro capítulo, pelo que a função

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a} : a \in Z \setminus \{0\}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\prod_{a \in Z} \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^{m(a)} \end{array}$$

também envia elementos de S^1 em elementos de S^1. Consideremos a função $h = f/g$. Como os zeros de g são também zeros de f e têm as mesmas multiplicidades, h pode ser prolongada a uma função analítica cujo domínio contém $D(0, 1)$ e que não tem zeros naquele disco; além disso, $|h(z)| = 1$ quando $|z| = 1$. Pelo exercício 99 do segundo capítulo, $h|_{D(0,1)}$ é constante e, portanto, existe algum número complexo k de módulo 1 tal que $|z| < 1 \Longrightarrow h(z) = k$. Então, para cada número complexo z tal que $|z| < 1$,

$$f(z) = k \prod_{a \in Z} \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^{m(a)}.$$

Do teorema da identidade deduz-se que a relação anterior é válida sempre que z não seja da forma $1/\overline{a}$, para algum $a \in Z \setminus \{0\}$. Mas, como f não tem pólos, tem-se $Z = \emptyset$ ou $Z = \{0\}$. No primeiro caso, f é constante; no segundo, tem-se $f(z) = kz^{m(0)}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Exercício nº9

1. Como a é ponto regular de f e g, existem séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ tais que, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\forall z \in D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ e } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n.$$

Então

$$(\forall z \in D(a,\varepsilon)) : F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ e } G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n.$$

Sejam $M = \operatorname{ord}(a,f)$ e $N = \operatorname{ord}(a,g)$.

Suponha-se que $M \geq N$. Então $n = N$ e $a_k = b_k = 0$ se k for um número inteiro menor do que n. Neste caso tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z\to a} \frac{a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots}{b_n(z-a)^n + b_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots} \\
&= \lim_{z\to a} \frac{a_n + a_{n+1}(z-a) + \cdots}{b_n + b_{n+1}(z-a) + \cdots} \\
&= \frac{a_n}{b_n} \\
&= \frac{F^{(n)}(a)/n!}{G^{(n)}(a)/n!} \\
&= \frac{F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(a)} \,.
\end{aligned}$$

Suponha-se agora que $M < N$. Então $n = M$, $\dfrac{F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(a)} = \dfrac{a_M}{0} = \infty$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z\to a} \frac{a_M(z-a)^M + a_{M+1}(z-a)^{M+1} + \cdots}{b_N(z-a)^N + b_{N+1}(z-a)^{N+1} + \cdots} \\
&= \lim_{z\to a} \frac{1}{(z-a)^{N-M}} \cdot \frac{a_M + a_{M+1}(z-a) + \cdots}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \cdots} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

2. Sejam F e G como no enunciado da primeira alínea. Se $F'(a) \neq 0$ então, por continuidade, F' não se anula em alguma vizinhança de a. Se $F'(a) = 0$, então a é um zero isolado de F' ou um zero interior de F'. Mas se a fosse um zero interior de F', então a restrição de F a alguma vizinhança de a seria constante e tomaria sempre o valor 0 (pois $\operatorname{ord}(a,f) \geq 1 \implies F(a) = 0$), o que é absurdo pois f é uma função com valores em $\mathbb{C}^*$. Logo, se a for um zero de F', a é um zero isolado pelo que, para alguma vizinhança V de a, se tem $f'(V \setminus \{a\}) = F'(V \setminus \{a\}) \subset \mathbb{C}^*$. Mostra-se da mesma maneira que existe alguma vizinhança V de a tal que $g'(V \setminus \{a\}) \subset \mathbb{C}^*$.

Para completar a resolução, basta observar que $\inf\{\operatorname{ord}(a,f'), \operatorname{ord}(a,g')\} = n-1$ (pela primeira alínea da proposição 4.2.2), pelo que, pela alínea anterior.

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(a)} = \lim_{z\to a, z\in V\setminus\{a\}} \frac{f'(z)}{g'(z)} \,.$$

Exercício nº10

1. É claro que $\pi\mathbb{Z}$ é fechado e que todos os seus pontos são pontos isolados, pelo que só falta provar que, se $n \in \mathbb{Z}$, então $n\pi$ é pólo da função cotangente, ou seja, que $\operatorname{ord}(n\pi, \cot) \in \mathbb{Z}_-^*$. Mas sabe-se que

$$\operatorname{ord}(n\pi, \cot) = \operatorname{ord}\left(n\pi, \frac{\cos}{\operatorname{sen}}\right) = \operatorname{ord}(n\pi, \cos) - \operatorname{ord}(n\pi, \operatorname{sen}) = 0 - 1 = -1$$

pois

$$(\forall z \in \mathbb{Z}) : \operatorname{sen}(z) = (-1)^n \operatorname{sen}(z - n\pi) = (-1)^n(z - \pi) - \frac{(-1)^n}{3!}(z - \pi)^3 + \cdots$$

e

$$(\forall z \in \mathbb{Z}) : \cos(z) = (-1)^n \cos(z - n\pi) = (-1)^n - \frac{(-1)^n}{2!}(z - \pi)^2 + \cdots$$

pelo que $\operatorname{ord}(n\pi, \operatorname{sen}) = 1$ e $\operatorname{ord}(n\pi, \cos) = 0$.

2. O conjunto Z dos zeros de P é finito, pelo que é fechado e todos os seus pontos são isolados. Por outro lado, se n é o grau de P e se $z_0 \in Z$, então existem $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tais que $a_k \neq 0$ e que $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots + a_n(z - z_0)^n$. Logo, $\operatorname{ord}(z_0, P) = k$ e, consequentemente, $\operatorname{ord}(z_0, 1/P|_{\mathbb{C}\setminus Z}) = -k$.

Exercício nº14

Suponha-se que a é uma singularidade essencial de f. Sejam $z_0 \in U \setminus \{a\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subset U \setminus \{a\}$. Então, o conjunto $f(D(z_0, \varepsilon))$ é aberto (pelo teorema da função aberta) e o conjunto $f\left(U \setminus (\{a\} \cup D(z_0, \varepsilon))\right)$ é denso (pelo teorema de Casorati-Weierstrass). Logo, os dois conjuntos têm intersecção não vazia, o que é absurdo, pois f é injectiva.

Exercício nº15

1. Como f é injectiva, a função $f^\times$ também o é; logo, pelo exercício anterior, 0 não é ponto singular essencial de $f^\times$. Por outro lado, se $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ for a série de Taylor da função f no ponto 0, tem-se

$$(\forall z \in \mathbb{C}^*) : f^\times(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^{-n}.$$

Uma vez que 0 não é ponto singular essencial de $f^\times$, existe necessariamente algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ quando $n > N$. Mas então

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n,$$

ou seja, f é uma função polinomial.

2. Seja N como na resolução da alínea anterior. Sabe-se, pelo exercício 27 do primeiro capítulo, que existem $c, z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ com $c \neq 0$ e tais que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_N).$$

Mas, uma vez que f é injectiva, só pode ter um único zero, pelo que $z_1 = z_2 = \cdots = z_N$. Então

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = c(z - z_1)^N.$$

A injectividade de f também implica que $N = 1$, pois se se tivesse $N > 1$ então tinha-se

$$f(z_1 + 1) = c = f\left(z_1 + e^{2\pi i/N}\right).$$

Logo, se se tomar $a = c$ e $b = -c.z_1$, tem-se

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = c(z - z_1) = az + b.$$

Exercício nº17

1. Tem-se

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{\cos z} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{res}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos}\right).\operatorname{ind}\left(\frac{\pi}{2}, \gamma\right) + \operatorname{res}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos}\right).\operatorname{ind}\left(-\frac{\pi}{2}, \gamma\right)\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{\cos'(\pi/2)} + \frac{1}{\cos'(-\pi/2)}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_\gamma e^{1/z}\, dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(0, e^{1/z}\right) \operatorname{ind}(0, \gamma) = 2\pi i$, pois $(\forall z \in \mathbb{C}^*) : e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \cdots$

3. Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z \neq -1$, seja $f(z) = (e^z + 1)^{-1}$. Então f é analítica e o seu domínio é $U = \mathbb{C} \setminus \{(2n + 1)\pi i : n \in \mathbb{Z}\}$. Em particular, o domínio de f contém o disco $D(0, \pi)$ e, uma vez que γ é homotopicamente nulo em $D(0, \pi)$, γ é homotopicamente nulo em U, pelo que $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, pelo corolário 3.2.1.

Exercício nº21

Sejam $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ $(t \in [0, 1])$, $\varepsilon(z) = e^z$ e $f(z) = -az^n$. O teorema de Rouché diz que se $|\varepsilon(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|$ para qualquer $t \in [0, 1]$, então f e $f + \varepsilon$ têm o mesmo número de zeros em $D(0, 1)$, contados com as respectivas multiplicidades. Mas se z é um número complexo de módulo 1, então tem-se:

$$|\varepsilon(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e < a = |f(z)|$$

e o número de zeros de f em $D(0, 1)$, contados com as respectivas multiplicidades, é igual a n.

Exercício nº22

1. Seja $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ o lacete definido por $\gamma(t) = e^{it}$. Então γ é um lacete simples, $\operatorname{int}(\gamma) = D(0, 1)$ e o traço de γ é S^1. Para cada $z \in \mathbb{C}$, sejam $f(z) = 6z$ e $\varepsilon(z) = z^5 + 2$. Então, se $z \in S^1$, $|\varepsilon(z)| = |z^5 + 2| \leq |z|^5 + 2 \leq 3 < 6 = |f(z)|$. Logo, pelo teorema de Rouché, f e $f + \varepsilon$ têm o mesmo número de zeros em $D(0, 1)$, contados com as respectivas multiplicidades. Uma vez que f tem exactamente um zero em $D(0, 1)$ (nomeadamente 0), o polinómio $z^5 + 6z + 2$ tem exactamente um zero no mesmo disco.

2. Basta fazer o mesmo que na alínea anterior, mas desta vez com $f(z) = z^5$ e $\varepsilon(z) = 6z + 2$. Então, se $|z| = 2$, $|\varepsilon(z)| = |6z + 2| \leq 14 < 32 = |f(z)|$, pelo que o polinómio dado tem cinco zeros em $D(0, 2)$, contados com as respectivas multiplicidades.

Exercício nº26

Tem-se, recorrendo ao teorema 4.3.6:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i\left(\operatorname{res}\left(ai, \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right) + \operatorname{res}\left(bi, \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right)\right)\right) \\
&= \pi\operatorname{Re}\left(i\left(\frac{e^{-a}}{2a(b^2-a^2)i} + \frac{e^{-b}}{-2b(b^2-a^2)i}\right)\right) \\
&= \pi\left(\frac{e^{-a}}{2a(b^2-a^2)} - \frac{e^{-b}}{2b(b^2-a^2)}\right) \\
&= \pi\frac{be^{-a}-ae^{-b}}{2ab(b^2-a^2)}\,.
\end{aligned}$$

Exercício nº28

Seja R um número real tal que

$$(\forall z \in Z) : |z| < R \tag{5}$$

e seja $\gamma(t) = Re^{2\pi it}$ $(t \in [0,1])$. O teorema dos resíduos diz então que:

$$\sum_{z\in Z}\operatorname{res}\left(z, \frac{P|_{\mathbb{C}\setminus Z}}{Q|_{\mathbb{C}\setminus Z}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int_0^1 \frac{P(Re^{2\pi it})Re^{2\pi it}}{Q(Re^{2\pi it})}dt.$$

Então tem-se:

$$\left|\sum_{z\in Z}\operatorname{res}\left(z, \frac{P|_{\mathbb{C}\setminus Z}}{Q|_{\mathbb{C}\setminus Z}}\right)\right| = \left|\int_0^1 \frac{P(Re^{2\pi it})Re^{2\pi it}}{Q(Re^{2\pi it})}dt\right| \le \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{P(Re^{2\pi it})Re^{2\pi it}}{Q(Re^{2\pi it})}\right|. \tag{6}$$

Vai-se usar esta fórmula para mostrar que $\left|\sum_{z\in Z}\operatorname{res}\left(z, P|_{\mathbb{C}\setminus Z}/Q|_{\mathbb{C}\setminus Z}\right)\right|$ é menor do que qualquer número positivo. Seja $\varepsilon > 0$. Sabe-se que $\lim_{z\to\infty}\frac{P(z)z}{Q(z)} = 0$, pois o grau do numerador é menor do que o grau do denominador, pelo que existe algum $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|z| > M \Longrightarrow |P(z)z/Q(z)| < \varepsilon$. Então se, para além da condição (5), se tiver $R > M$ deduz-se de (6) que se tem:

$$\left|\sum_{z\in Z}\operatorname{res}\left(z, \frac{P|_{\mathbb{C}\setminus Z}}{Q|_{\mathbb{C}\setminus Z}}\right)\right| < \varepsilon.$$

Como isto é verdade para qualquer $\varepsilon > 0$, a soma dos resíduos é igual a 0.