Análise Complexa – Resolução de alguns exercícios do capítulo 3

Exercício nº1

Para cada $t, u \in [0,1]$, seja

$$H(t,u) = \gamma_1(2\pi t) + u.(\gamma_2(2\pi t) - \gamma_1(2\pi t)) = (r_1 + u.(r_2 - r_1))\, e^{2\pi i t};$$

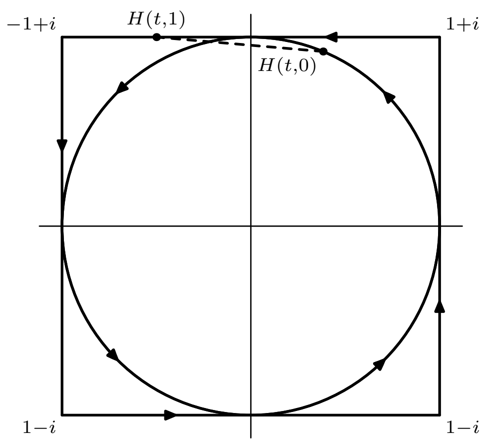
então $|H(t,u)| = r_1 + u.(r_2 - r_1) > 0$, ou seja, a imagem de H está contida em $\mathbb{C}^*$. A função H é claramente contínua e tem-se

1. $(\forall t \in [0,1]) : H(t,0) = \gamma_1(2\pi t)$;
2. $(\forall t \in [0,1]) : H(t,1) = \gamma_2(2\pi t)$;
3. $(\forall u \in [0,1]) : H(0,u) = H(1,u) = r_1 + u.(r_2 - r_1)$.

Logo, H é uma homotopia em $\mathbb{C}^*$ entre γ_1 e γ_2.

Exercício nº2

O lacete γ_1 está definido como sendo a justaposição de quatro caminhos que têm por domínio o intervalo $[0,1]$, pelo que o seu domínio é o intervalo $[0,4]$. De maneira análoga à resolução do exercício anterior, define-se, para cada $t, u \in [0,1]$,



$$H(t,u) = \gamma_1(4t) + u.(\gamma_2(2\pi t) - \gamma_1(4t));$$

se se mostrar que H nunca se anula, estará provado que H é uma homotopia em $\mathbb{C}^*$ entre γ_1 e γ_2. Seja $u \in [0,1]$. Se $t \in [0,1/4]$, $H(t,0)(= \gamma_1(4t))$ pertence ao segmento de recta que une $1+i$ a $-1+i$ (veja-se a figura ao lado), enquanto que $H(t,1)(= \gamma_2(2\pi t))$ está na parte da circunferência de centro 0 e raio 1 situada no primeiro quadrante. Então $H(t,u)$ pertence ao segmento de recta que une um ponto do primeiro quadrante (distinto de 0) a um ponto do segmento de recta que une $1+i$ a $-1+i$; logo, não se pode ter $H(t,u) = 0$.

Se $t \in [1/4, 1/2]$, $t \in [1/2, 3/4]$ ou $t \in [3/4, 1]$, o argumento é análogo.

Exercício nº4

1. Primeira resolução:

$$\int_0^1 (t+i)^2\, dt = \int_0^1 t^2 + 2it - 1\, dt = \int_0^1 t^2 - 1\, dt + i \int_0^1 2t\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{t=0}^{t=1} + i\left[t^2\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{2}{3} + i.$$

Segunda resolução:

$$\int_0^1 (t+i)^2\, dt = \left[\frac{(t+i)^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{(1+i)^3}{3} - \frac{i^3}{3} = -\frac{2}{3} + i.$$

2. Primeira resolução:

$$\int_0^{\pi/2} e^{it}\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,dt + i\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(t)\,dt = 1+i.$$

Segunda resolução:

$$\int_0^{\pi/2} e^{it}\,dt = \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{i-1}{i} = 1+i.$$

3. Tem-se:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t+i}dt &= \int_0^1 \frac{t-i}{t^2+1}dt\\ &= \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt - i\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt\\ &= \left[\frac{1}{2}\log(t^2+1)\right]_{t=0}^{t=1} + [\arctan t]_{t=0}^{t=1}\\ &= \frac{1}{2}\log(2) + i\frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Exercício nº5

1. $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,dz = \int_0^\pi \overline{e^{it}}ie^{it}\,dt = i\int_0^\pi e^{-it}e^{it}\,dt = i\int_0^\pi 1\,dt = \pi i.$

2. Tem-se

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{Im}(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(e^{it})ie^{it}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}ie^{it}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{2it}-1\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2it}}{2i}-t\right]_{t=0}^{t=2\pi}\\ &= -\pi.\end{aligned}$$

3. Se $m \neq 1$ então f tem primitiva; como γ é um lacete, deduz-se que $\int_\gamma f = 0$. No caso restante, tem-se

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = 2\pi i.$$

4. $\displaystyle\int_\gamma z+1\,dz = \left[\frac{z^2}{2}+z\right]_{z=0}^{z=1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} + (1+i) = 1+2i.$

5. Tem-se

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} &= \int_0^{\pi/4} \frac{ie^{it}}{1+e^{2it}}dt\\ &= i\int_0^{\pi/4} \frac{1}{e^{-it}+e^{it}}dt\\ &= \frac{i}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}dt\\ &= \frac{i}{2}\left[\log\left(\frac{1}{\cos t}+\tan t\right)\right]_{t=0}^{t=\pi/4}\\ &= \frac{i\log\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}\,.\end{aligned}$$

Exercício nº8

1. Tem-se, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-int}\,dt &= \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{i(m-n)t}\,dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\,dt \text{ (pois a convergência é uniforme)} \\ &= 2\pi a_n r^n\end{aligned}$$

pois, se $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{n\}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\,dt = \left[\frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

2. Resulta da igualdade anterior e do facto de a convergência ser uniforme na circunferência de centro a e raio r que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|f\left(a+re^{it}\right)\right|\,dt &= \int_0^{2\pi} f\left(a+re^{it}\right)\overline{f\left(a+re^{it}\right)}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} f\left(a+re^{it}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}r^n e^{-int}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{it}\right)r^n e^{-int}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi\left|a_n\right|^2 r^{2n};\end{aligned}$$

a desigualdade do enunciado é trivial.

Exercício nº10

Primeira resolução: Tem-se, para cada número real positivo r:

$$\int_{\gamma(r)} \frac{e^z}{z}dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{re^{it}}}{re^{it}} ire^{it}\,dt = i\int_0^{\pi} e^{re^{it}}\,dt. \tag{1}$$

Por outro lado, sabe-se que

$$\int_0^{\pi} \lim_{r\to 0} e^{re^{it}}\,dt = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi$$

e esta igualdade, juntamente com (1), sugere que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{re^{it}}\,dt = \pi.$$

É necessário demonstrar que se tem efectivamente esta igualdade pois, em geral, a passagem ao limite e a integração não comutam.

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{re^{it}}\,dt = \pi &\iff \lim_{r\to 0}\int_0^{\pi} e^{re^{it}} - 1\,dt = 0 \\ &\iff \lim_{r\to 0}\left|\int_0^{\pi} e^{re^{it}} - 1\,dt\right| = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Usando o exercício 48 do segundo capítulo (no caso particular $n = 1$), deduz-se que:

$$\left|\int_0^\pi e^{re^{it}} - 1\,dt\right| \leq \int_0^\pi \left|e^{re^{it}} - 1\right| dt \leq \int_0^\pi 2\left|re^{it}\right| dt$$

se $r \leq 1$. Visto que

$$\int_0^\pi 2\left|re^{it}\right| dt = 2\pi r$$

é então claro que se tem (2).

Segunda resolução: Tem-se, para cada $r \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_{\gamma(r)} \frac{e^z}{z} dz = \int_{\gamma(r)} \frac{e^z - 1}{z} dz + \int_{\gamma(r)} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma(r)} \frac{e^z - 1}{z} dz + i\pi.$$

Considere-se a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \begin{cases} (e^z - 1)/z & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0; \end{cases} \end{array}$$

então tem-se

$$\int_{\gamma(r)} \frac{e^z}{z} dz = \int_{\gamma(r)} f(z)\,dz + i\pi$$

e

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!},$$

pelo que a função

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1).(n+1)!} \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n.n!}\right) \end{array}$$

é uma primitiva de f, pelo teorema 2.3.1. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \int_{\gamma(r)} \frac{e^z}{z} dz &= \lim_{r\to 0} \int_{\gamma(r)} f(z)\,dz + i\pi \\ &= \lim_{r\to 0} (F(\gamma(r)(\pi)) - F(\gamma(r)(0))) + i\pi \\ &= \lim_{r\to 0} (F(-r) - F(r)) + i\pi \\ &= F(0) - F(0) + i\pi \\ &= i\pi. \end{aligned}$$

Observe-se que esta resolução pode ser encurtada recorrendo ao teorema 3.2.8, pois este teorema permite afirmar que a função f possui uma primitiva, visto que se trata de uma função analítica cujo domínio é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$.

Exercício nº15

Para se poder empregar a fórmula de Cauchy para calcular o integral em questão, define-se $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\gamma(t) = e^{it}$ e tenta-se encontrar uma função analítica $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $U \supset S^1 = \gamma([0, 2\pi])$ e que

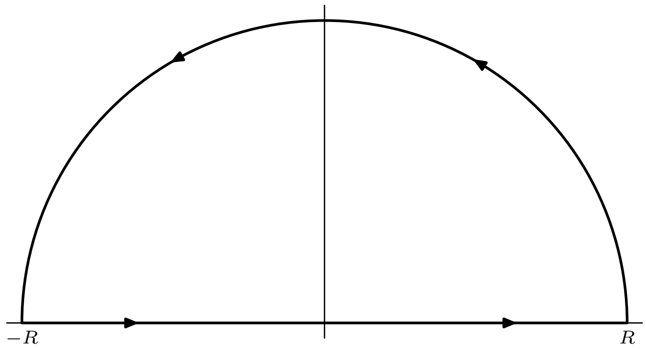
$$(\forall t \in [0, 2\pi]) : f(\gamma(t))\gamma'(t) \left(= f\left(e^{it}\right) ie^{it}\right) = e^{e^{it}} \Longleftrightarrow f\left(e^{it}\right) = \frac{e^{e^{it}}}{ie^{it}}\,.$$

Basta definir $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f(z) = e^z/(iz)$. Então, pela fórmula de Cauchy,

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \frac{e^0}{i} = 2\pi.$$

Exercício nº17

1. O traço de γ_R está representado pela seguinte figura (as setas representam o sentido em que o traço é percorrido):



2. A função f é analítica (pelo lema 2.4.1) e $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo. Logo, o valor do integral é 0, pelo corolário 3.2.2.

3. Para cada $R \in \mathbb{R}_+^*$, seja

$$\begin{array}{rccc} \alpha_R: & [0,1/2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & Re^{2\pi i t}. \end{array}$$

Então, se $R \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_{-R}^{R} f = \int_{\gamma_R} f - \int_{\alpha_R} f = -\int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = \pi i - \int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz,$$

pelo que basta mostrar que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Para tal, observe-se que, para cada $R \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{z} dz\right| &= \left|\int_0^{1/2} \frac{e^{iRe^{2\pi i t}}}{Re^{2\pi i t}} 2\pi i R e^{2\pi i t}\,dt\right| \\ &= \left|2\pi i \int_0^{1/2} e^{-R\,\mathrm{sen}(2\pi t)+iR\cos(2\pi t)}\,dt\right| \\ &\leq 2\pi \int_0^{1/2} \left|e^{-R\,\mathrm{sen}(2\pi t)+iR\cos(2\pi t)}\right|\,dt \\ &= 2\pi \int_0^{1/2} e^{-R\,\mathrm{sen}(2\pi t)}\,dt \\ &= 4\pi \int_0^{1/4} e^{-R\,\mathrm{sen}(2\pi t)}\,dt \text{ (pois } (\forall t \in [0,\pi]) : \mathrm{sen}(t) = \mathrm{sen}(\pi - t)) \\ &\leq 4\pi \int_0^{1/4} e^{-4Rt}\,dt \text{ (pois } (\forall t \in [0,1/4]) : \mathrm{sen}(2\pi t) \geq 4t) \\ &= 4\pi \left[\frac{e^{-4Rt}}{-4R}\right]_{t=0}^{t=1/4} \\ &= \pi \frac{1-e^{-R}}{R} \end{aligned}$$

e que

$$\lim_{R\to+\infty} \pi \frac{1-e^{-R}}{R} = 0.$$

4. Observe-se que, para cada $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \operatorname{Im} f(x)$. Tem-se então

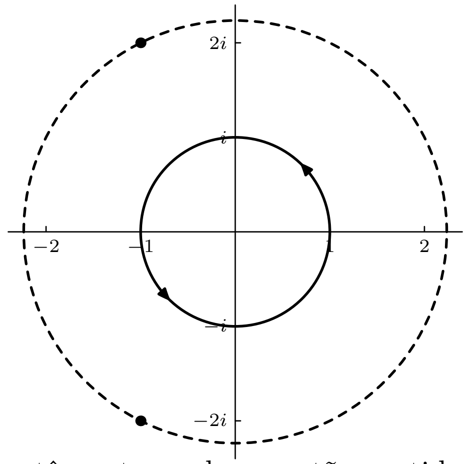
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R \operatorname{Im} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \operatorname{Im}\left(\int_{-R}^R f(x)\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R f(x)\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\pi i) \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Exercício nº19

Se $z \in \mathbb{C}$, tem-se $z^2+2z+5 = (z+1+2i).(z+1-2i)$.

1. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-1 \pm 2i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $f(z) = (z+4)/(z^2+2z+5)$; quer-se calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$. Observe-se que γ é homotopicamente nulo em $\mathbb{C}\setminus\{-1\pm 2i\}$, pois

$$\text{traço de } \gamma \subset D\left(0, \sqrt{5}\right) \subset \mathbb{C} \setminus \{-1 \pm 2i\}$$



(veja-se a figura ao lado); como γ é homotopicamente nulo em $D\left(0, \sqrt{5}\right)$ (pois este conjunto é convexo e, portanto, simplesmente conexo), então, por maioria de razão, γ é homotopicamente nulo em $\mathbb{C} \setminus \{-1 \pm 2i\}$. Logo, $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, pelo corolário 3.2.1. Naturalmente, em vez de $D\left(0, \sqrt{5}\right)$ poderiam ter sido empregues outros abertos convexos (ou, mais geralmente, simplesmente conexos) que contêm o traço de γ e estão contidos em $\mathbb{C} \setminus \{-1 \pm 2i\}$ como, por exemplo, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in]-2, 2[\}$.

2. Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1-2i\}$, seja $f(z) = (z+4)/(z+1+2i)$. O lacete γ é homotopicamente nulo em $\mathbb{C} \setminus \{-1-2i\}$, visto que

$$\text{traço de } \gamma \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -2\} \subset \mathbb{C} \setminus \{-1-2i\}$$

e que $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -2\}$ é convexo. Logo

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z+1-2i}\, dz = 2\pi i f(-1+2i) = 2\pi i \left(\frac{3+2i}{4i}\right) = \frac{3\pi}{2} + \pi i.$$

3. Analogamente ao que foi feito na alínea anterior, tem-se

$$\int_\gamma \frac{z+4}{z^2+2z+5}\, dz = \int_\gamma \frac{(z+4)/(z+1-2i)}{z+1+2i}\, dz = 2\pi i.\left(\frac{3-2i}{-4i}\right) = -\frac{3\pi}{2} + \pi i.$$

4. Comece-se por observar que se se determinar $a, b \in \mathbb{C}$ tais que

$$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1 \pm 2i\}) : \frac{z+4}{z^2+2z+5} = \frac{a}{z+1+2i} + \frac{b}{z+1-2i},$$

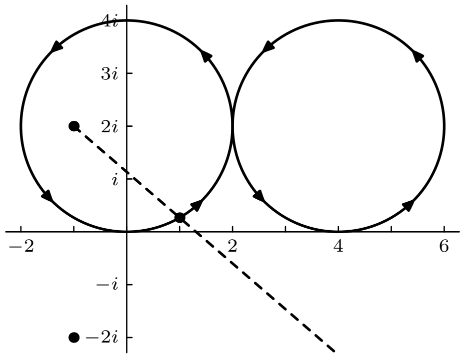
então o problema fica praticamente resolvido, pois que o integral em questão se reduz a

$$a.\int_\gamma \frac{1}{z+1+2i}\,dz + b.\int_\gamma \frac{1}{z+1-2i}\,dz \tag{3}$$

e, pela definição de índice, (3) é igual a

$$2\pi i\,(a\,\mathrm{ind}(-1-2i,\gamma) + b\,\mathrm{ind}(-1+2i,\gamma))\,(=2\pi i(a+b)). \tag{4}$$

Um cálculo simples revela que se tem $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$ e $b = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$, pelo que (4)$=2\pi i$.



5. Analogamente à segunda alínea, o resultado é $\frac{3\pi}{2} + \pi i$ pois, por um lado, o lacete γ é homotopicamente nulo em $\mathbb{C} \setminus \{-1-2i\}$ e, como se pode ver pela figura ao lado, o índice de γ relativamente a $-1+2i$ é igual a 1, pois que a semi-recta que se vê na figura intersecta o traço de γ num único ponto e aí a semi-recta é «empurrada» no sentido directo.

Exercício nº21

Para cada $z \in \mathbb{C}$, seja $f(z) = z^n$. Então tem-se:

$$\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^n} dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}\,\mathrm{ind}(1,\gamma) = 2\pi i n.$$

Exercício nº24

1. Por hipótese, 0 é um zero de f. Como a função f é analítica, trata-se de um zero isolado ou de um zero interior. Mas se fosse um zero interior, ter-se-ia $f'(0) = 0$; logo, trata-se de um zero isolado e, portanto, tem-se $f\left(\overline{D(0,s)} \setminus \{0\}\right) \subset \mathbb{C}^*$ para algum $s \in]0,r]$.

2. Considere-se a função $F : D(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \begin{cases} f(z)/z & \text{se } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

que é analítica, pelo lema 2.4.1. Então:

$$\int_\gamma g\frac{f'}{f} = \int_\gamma \frac{g(z)f'(z)/F(z)}{z}\,dz = 2\pi i g(0)\frac{f'(0)}{F(0)} = 2\pi i g(0).$$

Exercício nº25

1. Se $x \in \mathbb{R}$, então

$$Q(x) = P(x)\overline{P(\overline{x})} = P(x)\overline{P(x)} = |P(x)|^2 > 0,$$

pois $P(x) \neq 0$. Além disso, se se tivesse $Q(z) = 0$ para algum $z \in \mathbb{C}$, então tinha-se

$$\begin{aligned} P(z)\overline{P(\overline{z})} = 0 &\iff P(z) = 0 \vee \overline{P(\overline{z})} = 0 \\ &\iff P(z) = 0 \vee P(\overline{z}) = 0, \end{aligned}$$

o que é impossível, pois P não tem zeros.

2. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ tais que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N.$$

Então

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : \overline{P(\overline{z})} = \overline{a_0} + \overline{a_1} z + \cdots + \overline{a_N} z^N.$$

Assim sendo, Q é o produto de duas funções polinomiais de grau N, pelo que se trata de uma função polinomial de grau $2N$. Sejam $b_0, b_1, \ldots, b_{2N} \in \mathbb{C}$ tais que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{2N} z^{2N}.$$

Então, para cada $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} z^{2N} Q\left(z + \frac{1}{z}\right) &= z^{2N} \sum_{k=0}^{2N} b_k \left(z + \frac{1}{z}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2N} b_k z^{2N-k}(z^2 - 1)^k. \end{aligned}$$

Logo, se se definir $R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$R(z) = \sum_{k=0}^{2N} b_k z^{2N-k}(z^2 - 1)^k,$$

R é uma função polinomial tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C}^*) : R(z) = z^{2N} Q\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Resulta desta relação que, uma vez que Q não tem zeros, só se poderia ter $R(z) = 0$ quando $z = 0$. Mas $R(0) = b_0 = |a_0|^2 = |P(0)|^2 \neq 0$.

3. Tem-se

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{\zeta^{2N-1}}{R(\zeta)} d\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{(2N-1)it}}{R\left(e^{it}\right)} i e^{it}\, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{2Nit}}{e^{2Nit} Q\left(e^{it} + e^{-it}\right)} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{1}{Q(2\cos t)} \\ &\in i\mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

pois, pela primeira alínea, a função que se está a integrar só toma valores reais maiores do que 0. Mas, por outro lado, visto que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \zeta & \mapsto & \dfrac{\zeta^{2N-1}}{R(\zeta)} \end{array}$$

é uma função analítica com domínio simplesmente conexo, o seu integral ao longo de qualquer lacete é igual a 0, pelo corolário 3.2.2.

Exercício nº26

1. Seja $z \in U$. Como $\exp'(=\exp)$ nunca se anula, sabe-se, pelo teorema da inversão local, que existe alguma vizinhança W_z de $l(z)$ tal que $\exp|_{W_z}$ é bianalítica; seja g a inversa desta função e seja V uma vizinhança aberta de z contida em U tal que $l(V_z) \subset W_z$.[1] Então

$$(\forall w \in V_z) : g(w) = g(\exp(l(w))) = l(w).$$

Logo, $l|_{V_z}$ é analítica. Como isto ocorre para cada $z \in U$, l é analítica, pelo proposição 2.4.1.
2. $(\forall z \in U) : \exp(l(z)) = z \Longrightarrow (\forall z \in U) : l'(z)\exp(l(z)) = 1 \Longleftrightarrow (\forall z \in U) : l'(z) = z^{-1}$.
3. Considere-se o lacete $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $\gamma(t) = e^{it}$. Se se tivesse $U = \mathbb{C}^*$, então

$$1 = \operatorname{ind}(0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma l'(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left(l(e^{2\pi i}) - l(e^0)\right) = 0.$$

Exercício nº27

Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma primitiva da função $\iota : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\iota(z) = z^{-1}$; uma tal primitiva existe por U ser simplesmente conexo. Seja $L = f - f(1)$. Então $(\forall z \in U) : L'(z) = z^{-1}$ e $L(1) = 0$. A função L é uma determinação do logaritmo, pois a função

$$\begin{array}{rccc} g: & U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \dfrac{e^{L(z)}}{z} \end{array}$$

é tal que

$$(\forall z \in U) : g'(z) = \frac{zL'(z)e^{L(z)} - e^{L(z)}}{z^2} = \frac{\exp(L(z)) - \exp(L(z))}{z^2} = 0.$$

Logo, a função g é constante e, como $g(1) = 1$, toma sempre o valor 1. Por outras palavras,

$$(\forall z \in U) : \exp(L(z)) = z.$$

A restrição de L a $\mathbb{R}_+^*$ coincide com a função logaritmo pois ambas têm a mesma derivada e tomam ambas o valor 0 no ponto 1.

Exercício nº29

1. Seja $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ a série de Taylor da função f no ponto 0; tem-se «$n = 1$» no somatório pois, por hipótese, $f(0) = 0$. Sabe-se, pelo teorema da representação de Cauchy-Taylor, que o raio de convergência desta série de potências é maior ou igual a 1. Por outro lado, como f é uma função do conjunto $D(0,1)$ em si mesmo, tem-se

$$(\forall z \in D(0,1)) : \left|\sum_{n=1}^\infty a_n z^n\right| = |f(z)| < 1.$$

Então sabe-se, pelo lema de Schwarz, que

$$(\forall z \in D(0,1)) : |f(z)| \leq |z|$$

[1] Uma tal vizinhança existe, pois l é contínua.

e que, para mostrar que se tem $|a_1| = 1$ e $a_n = 0$ quando $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, basta mostrar que se tem $|f(z_0)| = |z_0|$, para algum $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$. De facto, a igualdade que se quer provar é válida para qualquer $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ pois, por um lado, já se viu que $|f(z_0)| \leq |z_0|$ e, por outro lado, se se tivesse $|f(z_0)| < |z_0|$, pondo $w_0 = f(z_0)$, tem-se

$$|w_0| < |z_0| \iff \left|f^{-1}(w_0)\right| > |w_0|. \tag{5}$$

Mas o que foi feito acima com a função f também se pode fazer com a função f^{-1}, pelo que

$$(\forall z \in D(0,1)) : \left|f^{-1}(z)\right| \leq |z|,$$

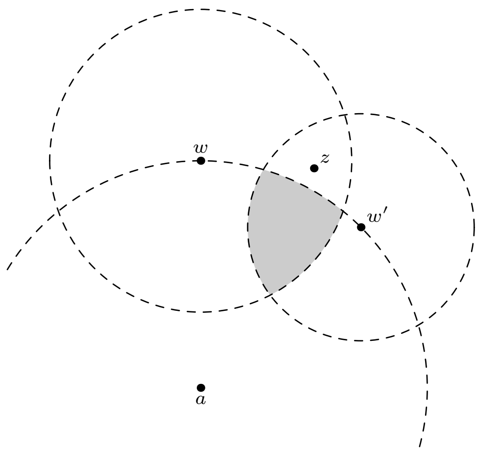
o que está em contradição com (5).

Está então provado que se $f \in \operatorname{Aut}(D(0,1))$ e se $f(0) = 0$, então $f = f_{\omega,0}$, para algum $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $|\omega| = 1$.

2. Seja $G = \{f_{a,b} : a, b \in \mathbb{C} \text{ e } |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ e seja $f \in \operatorname{Aut}(D(0,1))$; quer-se mostrar que $f \in G$. Seja $z_0 = f(0)$. Sabe-se, pela última alínea do exercício 14 do primeiro capítulo, que existe alguma função $g \in G$ tal que $g(0) = z_0$. Então $g^{-1} \circ f \in \operatorname{Aut}(D(0,1))$ e $(g^{-1} \circ f)(0) = g^{-1}(z_0) = 0$; logo, pela alínea anterior, $g^{-1} \circ f \in G$. Como $f = g \circ (g^{-1} \circ f)$ e G é um grupo relativamente à composição (pela terceira alínea do exercício 14 do primeiro capítulo), $f \in G$.

Exercício nº30

Suponha-se, por redução ao absurdo, que f não possui nenhum ponto singular. Então existe, para cada w pertencente à circunferência C de centro a e raio R, algum $r_w \in \mathbb{R}_+^*$ tal que f é prolongável a uma função analítica $f_w : D(a,R) \cup D(w,r_w) \longrightarrow \mathbb{C}$. Se $w, w' \in C$ e se $z \in D(w,r_w) \cap D(w',r_{w'})$, então $f_w(z) = f_{w'}(z)$; isto é uma consequência do teorema da identidade, pois os discos $D(w,r_w)$ e $D(w',r_{w'})$ são conexos e as restrições das funções f_w e $f_{w'}$ ao conjunto $D(w,r_w) \cap D(w',r_{w'}) \cap D(a,R)$, representado a sombreado na figura ao lado, coincidem (são ambas idênticas à restrição de f ao mesmo conjunto). Considere-se o conjunto



$$U = D(a,R) \cup \bigcup_{w \in C} D(w,r_w).$$

Pelo que foi visto acima, faz sentido definir $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ do seguinte modo: F é um prolongamento de f e, para cada $z \in U$, se $z \in D(w,r_w)$ para algum $w \in C$, então $F(z) = f_w(z)$. A função F é analítica, pela proposição 2.4.1, e, pelo teorema da representação de Cauchy-Taylor, o raio de convergência da sua série de Taylor no ponto a é maior ou igual ao raio de qualquer disco de centro a contido em U. Mas U é um aberto que contém $D(a,R) \cup C = \overline{D(a,R)}$, pelo que $U \supset D(a,R')$, para algum $R' \in]R,+\infty[$; logo, o raio de convergência da série de Taylor da função F no ponto a é maior do que R. Mas isto é impossível, uma vez que a série de Taylor em questão é $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ (pois F é um prolongamento de f) e o raio de convergência desta série de potências é R, por hipótese.

Exercício nº35

Seja $M = \sup\{|f(z)| : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in [0,1]\}$; M existe pois $|f|$ é uma função contínua e $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in [0,1]\}$ é compacto. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$; então

$$f(x+yi) = f((x-[x]) + [x] + yi)$$

$$\begin{aligned}
&= f(x-[x]+yi) \text{ (pois } f \text{ é periódica de período 1)}\\
&= f(x-[x]+(y-[y])i+[y]i)\\
&= f(x-[x]+(y-[y])i) \text{ (pois } f \text{ é periódica de período } i\text{).}
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de M, $|f(x+yi)| \leq M$ e deduz-se então do teorema de Liouville que f é constante.

Exercício nº36

Se $z \in \mathbb{C}$, tem-se

$$|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z} \iff |f(z)| \leq |e^z| \iff \left|\frac{f(z)}{e^z}\right| \leq 1. \tag{6}$$

Como a função $f/\exp$ é inteira e limitada, é constante, pelo teorema de Liouville. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z)/\exp(z) = \lambda$. Então, por (6), $|\lambda| \leq 1$.

Exercício nº37

Se $\overline{f(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$, então $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$ é um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, pelo que contém algum disco aberto $D(a,r)$. A função

$$\begin{aligned}
g:\ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}\\
z &\mapsto 1/(f(z)-a)
\end{aligned}$$

é uma função inteira e, para cada $z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| = 1/|f(z)-a| \leq 1/r$. Mas então g seria constante, pelo teorema de Liouville, pelo que f também seria constante, o que é absurdo.

Exercício nº38

Considere-se a função analítica

$$\begin{aligned}
g:\ D(0,1) &\longrightarrow \mathbb{C}\\
z &\mapsto \frac{f(z_0+rz)-f(z_0)}{M}.
\end{aligned}$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ for a série de Taylor de g no ponto 0, então sabe-se, pelo teorema da representação de Cauchy-Taylor, que a série converge em qualquer $z \in D(0,1)$; além disso

$$(\forall z \in D(0,1)) : \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right| = |g(z)| = \left|\frac{f(z_0+rz)-f(z_0)}{M}\right| < 1.$$

Logo, pelo lema de Schwarz, sabe-se que

- $$\begin{aligned}(\forall z \in D(0,1)) : |g(z)| \leq |z| &\iff (\forall z \in D(0,1)) : |f(z_0+rz)-f(z_0)| \leq M|z|\\
&\iff (\forall z \in D(z_0,r)) : |f(z)-f(z_0)| \leq \frac{M}{r}|z-z_0|.\end{aligned}$$
- se $|g(z)| = |z|$ para algum $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$, então, para algum número complexo ω de módulo 1, g toma sempre o valor ω.

Então se, para algum $z \in D(z_0, r)$, se tiver

$$|f(z) - f(z_0)| = \frac{M}{r}|z - z_0| \left(\iff \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{M}\right| = \left|\frac{z - z_0}{r}\right| \iff \left|g\left(\frac{z - z_0}{r}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{r}\right| \right),$$

pelo que visto atrás g toma sempre o valor ω, para algum número complexo ω de módulo 1, ou seja, $(\forall z \in D(z_0, r)) : f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0)$, com $\alpha = \omega M/r$. Como U é conexo, decorre do teorema da identidade que

$$(\forall z \in U) : f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0).$$

Se $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ for uma função inteira e se M for um majorante de $|f|$, então, fixado $z \in \mathbb{C}$, sabe-se que se $r \in \mathbb{R}_+^*$ for tal que $|z| < r$ tem-se

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{M}{r}|z|.$$

Logo, $|f(z) - f(0)| \leq \lim_{r \to +\infty} \dfrac{M}{r}|z| = 0$.

Exercício nº40

1. Não possui primitiva, pois se se definir $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, então

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{(z+1)^{-1}}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ind}(1, \gamma) = \pi i \neq 0.$$

2. Possui uma primitiva, pois o domínio é simplesmente conexo; o segmento de recta que une o ponto 0 a qualquer outro ponto do domínio está contido neste.

3. Primeira resolução: Seja log a determinação principal do logaritmo. Então tem-se, para cada $z \in \mathbb{C}\backslash] - \infty, 1]$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\log'(z-1) - \log'(z+1)\right) \end{aligned}$$

o que mostra que a função $z \mapsto \frac{1}{2}\left(\log(z-1) - \log(z+1)\right)$, de domínio $\mathbb{C}\backslash] - \infty, 1]$, é uma primitiva de $f|_{\mathbb{C}\backslash]-\infty,1]}$. Isto sugere que a função

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{C} \setminus [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) \end{array}$$

poderá ser uma primitiva de $f|_{\mathbb{C}\setminus[-1,1]}$. Vai-se começar por mostrar que a definição de F faz sentido, ou seja, que $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \implies \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. De facto, se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, então $\frac{z-1}{z+1} = 1 - 2/(z+1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e se $z \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ é claro que $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}_+^*$. Para terminar a resolução, basta ver que

$$\begin{aligned} (\forall z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]) : F'(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(z+1)^2} \log'\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \\ &= \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z^2-1}, \end{aligned}$$

pelo que F é uma primitiva de $f|_{\mathbb{C}\setminus[-1,1]}$.

Segunda resolução: Segundo o teorema 3.2.7, afirmar que a função do enunciado possui alguma primitiva equivale a afirmar que o seu integral ao longo de qualquer lacete γ (cujo traço esteja contido em $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$) é nulo. Mas para um tal lacete γ tem-se

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} = 0 \iff \int_\gamma \frac{1/2}{z-1}dz - \int_\gamma \frac{1/2}{z+1}dz = 0 \iff \operatorname{ind}(1,\gamma) = \operatorname{ind}(-1,\gamma).$$

Visto que o segmento que une -1 a 1 é uma parte conexa do complementar do traço de γ, os índices de γ relativamente a quaisquer dois pontos desse segmento são idênticos, pela terceira alínea da proposição 3.1.20.

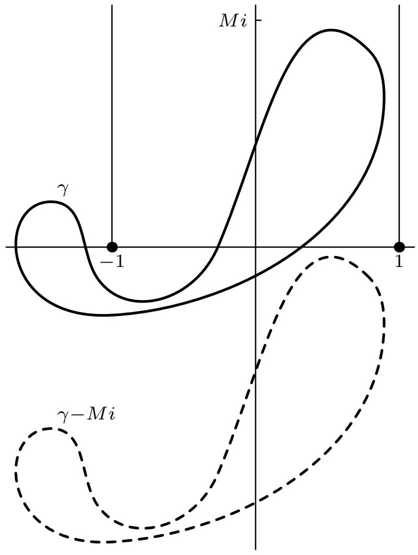
4. Possui uma primitiva, pois o domínio é simplesmente conexo. De facto, se

$$U = \mathbb{C} \setminus ((1+\mathbb{R}_+ i) \cup (-1+\mathbb{R}_+ i))$$

e se $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ é um lacete, então, se $M \in \mathbb{R}$ for maior do que qualquer número da forma $\operatorname{Im}(\gamma(t))$, a função

$$\begin{array}{rccc} H: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \gamma(a+t(b-a)) - uMi \end{array}$$

tem a imagem contida em U, pelo que é uma homotopia em U entre γ e $\gamma - Mi$ (veja-se a figura ao lado). Este último lacete está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, que é simplesmente conexo. Logo, $\gamma - Mi$ é homotopicamente nulo em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ e, por maioria de razão, em U.



Exercício nº41

Se uma tal função g existir, então $f' = g'e^g = g'f$, pelo que g será uma primitiva de f'/f.

Seja então $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma primitiva de f'/f; uma tal função existe uma vez que U é simplesmente conexo. Então

$$\left(\frac{f}{e^h}\right)' = \frac{e^h f' - f h' e^h}{e^{2h}} = 0$$

uma vez que $h' = f'/f$. Logo, f/e^h é constante. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda e^h$; então $\lambda \neq 0$, pelo que possui algum logaritmo ω e

$$f = \lambda e^h = e^{\omega+h},$$

pelo que basta tomar $g = \omega + h$.

Exercício nº42

Para mostrar que a função zeta é analítica basta, pelo teorema da convergência uniforme de Weierstrass, mostrar que, para cada compacto K contido em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$, a série de funções $\sum_{n=1}^\infty 1/n^z$ converge uniformemente em K. Seja $m = \inf\{\operatorname{Re} z : z \in K\}$. Visto que K é compacto, $m > 1$. Como, pela segunda alínea do exercício 73 do segundo capítulo, a série de funções que se está a considerar converge uniformemente no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq m\}$, por maioria de razão converge uniformemente em K.

Exercício nº45

Para cada $M \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^M f(at)\frac{dt}{t} = \int_0^M \frac{f(at)}{at}\cdot a\,dt = \int_0^{M/a}\frac{f(t)}{t}\,dt,$$

pelo que

$$\int_0^{+\infty} f(at)\frac{dt}{t} = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M f(at)\frac{dt}{t} = \lim_{M\to+\infty}\int_0^{M/a} f(t)\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{dt}{t}\,.$$

Exercício nº46

1. Se, para cada $t\in]0,+\infty[$, se definir $f_t : U \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f_t(z) = e^{-t}t^{z-1}$, então $(\forall z \in U) : \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} f_t(z)\,dt$ e, portanto, pelo teorema 3.2.11,

$$(\forall z\in U) : \Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} f_t'(z)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\log(t)\,dt.$$

2. Se $z \in U$, então,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z\,dt\\ &= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-t}t^z\,dt\\ &= \lim_{M\to+\infty}\left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{t=M} + \int_0^M e^{-t}zt^{z-1}\,dt \text{ (pois } \operatorname{Re} z > 0)\\ &= z\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-t}t^{z-1}\,dt\\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

3. A demonstração será feita por indução. É claro que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1 = 0!$. Por outro lado, se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $\Gamma(n) = (n-1)!$, então resulta da alínea anterior que

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!.$$

4. Visto que $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ é conexo, basta provar a existência de um prolongamento analítico da função Γ a $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$; resulta então do princípio do prolongamento analítico que tal prolongamento é único.

Resulta da terceira alínea que

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall z\in U) : \Gamma(z+n) = \Gamma(z).\prod_{k=0}^{n-1}(z+k). \tag{7}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}_-^*$, seja $U_n = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > n\}\setminus\{0,-1,-2,\ldots,n+1\}$ e considere-se a função

$$\begin{aligned}\Gamma_n : \quad U_n &\longrightarrow \mathbb{C}\\ z &\mapsto \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)};\end{aligned}$$

resulta então de (7) que

$$(\forall z\in U) : \Gamma_n(z) = \Gamma(z);$$

logo, a função Γ_n é um prolongamento analítico da função Γ a U_n. É consequência do princípio do prolongamento analítico que se $m \in \mathbb{Z}_-$ e se $m < n$, $\Gamma_m|_{U_n} = \Gamma_n$. Faz então sentido definir o seguinte prolongamento da função Γ a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$: se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, toma-se $n \in \mathbb{Z}_-$ tal que $\operatorname{Re}(z) > n$; então a z faz-se corresponder $\Gamma_n(z)$. Visto que, para cada $n \in \mathbb{Z}_-$, Γ_n é analítica, este prolongamento da função Γ é analítico.

5. Tem-se, pela definição de Γ, que, para cada $n \in \mathbb{Z}_-$,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to n}(z-n)\Gamma(z) &= \lim_{z\to n}(z-n)\cdot\frac{\Gamma(z-n+1)}{z.(z+1)\cdots(z-n-1)(z-n)} \\
&= \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n(-n)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{(-n)!}.
\end{aligned}$$

6. Tem-se

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-nt}(nt)^z\frac{dt}{t} \\
&= n^z\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{z-1}\,dt.
\end{aligned}$$

7. Se $z \in U$, tem-se

$$\begin{aligned}
\zeta(z)\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(z)}{n^z} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{z-1}\,dt \text{ (pela alínea anterior)} \\
&= \lim_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{z-1}\,dt \\
&= \lim_{N\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{N} e^{-nt}t^{z-1}\,dt \\
&= \lim_{N\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-(N+1)t}}{1-e^{-t}}\cdot t^{z-1}\,dt \\
&= \lim_{N\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{z-1}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t-1}dz - \lim_{N\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{z-1}\,dt;
\end{aligned}$$

logo, basta provar que

$$\lim_{N\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{z-1}\,dt = 0,$$

o que equivale a afirmar que

$$\lim_{N\in\mathbb{N}}\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{z-1}\,dt\right| = 0.$$

Mas tem-se, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{z-1}\,dt\right| &= \left|\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{z-1}\,dt\right| \\
&= \lim_{M\to+\infty}\left|\int_0^M \frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{z-1}\,dt\right| \\
&\leq \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{e^{-Nt}}{e^t-1}\cdot t^{\mathrm{Re}(z)-1}\,dt \text{ (pelas proposições 2.3.8 e 3.1.8)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\cdot e^{-Nt}t^{\mathrm{Re}(z)-2}\,dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-Nt}t^{\mathrm{Re}(z)-2}\,dt,
\end{aligned}$$

pois

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) : \frac{t}{e^t-1} < 1.$$

Seja $\alpha = \mathrm{Re}(z) - 2$; então $\alpha > -1$ e quer-se provar que

$$\lim_{N\in\mathbb{N}}\int_0^{+\infty} e^{-Nt}t^\alpha\,dt = 0. \tag{8}$$

Isto pode ser feito por mais do que um processo.

- Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $a^{\alpha+1}/(\alpha+1) < \varepsilon/4$. Então

  $$\int_0^a e^{-Nt}t^\alpha\,dt \leq \int_0^a t^\alpha\,dt = 2\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} < \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{9}$$

  Por outro lado, a função

  $$\begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & e^{-t}t^\alpha \end{array}$$

  é majorada; seja M um seu majorante. Então,

  $$N \gg 1 \Longrightarrow \int_a^{+\infty} e^{-Nt}t^\alpha\,dt \leq M.\int_a^{+\infty} e^{-(N-1)t}\,dt = \frac{e^{-(N-1)a}}{N-1} \leq \frac{1}{N-1} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{10}$$

  Logo, resulta de (9) e de (10) que, se N for suficientemente grande,

  $$\int_0^{+\infty} e^{-Nt}t^\alpha\,dt < \varepsilon.$$

  Como isto é válido para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, está provado que se tem (8).

- Pela alínea anterior, sabe-se que

  $$(\forall N \in \mathbb{N}) : \int_0^{+\infty} e^{-Nt}t^\alpha\,dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{N^{\alpha+1}};$$

  como $\alpha + 1 > 0$, tem-se (8).

Exercício nº47

Pelo teorema da convergência uniforme de Weierstrass, f é analítica e, para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, a sucessão de funções $\left(\sum_{n=1}^{N} f_n^{(k)}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f^{(k)}$. Logo,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \lim_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!} = \lim_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} c_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k}.$$

Exercício nº48

Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, seja $f(z) = z/(1-z^2)$. A série de funções do enunciado é $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, onde, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ e cada $z \in \mathbb{C} \setminus S^1$, $f_n(z) = f\left(z^{2^n}\right)$. Se $z \in D(0,1)$, então

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z.\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \cdots\right) = z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9 + \cdots,$$

pelo que

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : f_n(z) = z^{2^n} + z^{3.2^n} + z^{5.2^n} + z^{7.2^n} + \cdots. \tag{11}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, seja $\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} z^k$ a série de Taylor da função f_n no ponto 0. Então, por (11), tem-se que

$$(\forall n, k \in \mathbb{Z}_+) : c_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ for o produto de } 2^n \text{ por um número ímpar} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam K um compacto contido em $D(0,1)$ e $M = \sup_{z\in K} |z|$. Observe-se que

$$(\forall z \in D(0,1))(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : |f_n(z)| = \left|f\left(z^{2^n}\right)\right| = \left|\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}\right| = \frac{|z|^{2^n}}{|1 - z^{2^{n+1}}|} \leq \frac{M^{2^n}}{1 - M^{2^{n+1}}} \cdot$$

Resulta do critério da comparação que a série $\sum_{n=0}^{\infty} M^{2^n}/(1 - M^{2^{n+1}})$ converge (basta comparar com a série $\sum_{n=0}^{\infty} M^{2^n}$), pelo que, pelo teste M de Weierstrass, a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em K. Resulta do exercício anterior que

$$(\forall z \in D(0,1)) : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k} z^k. \tag{12}$$

Mas cada $k \in \mathbb{N}$ só pode ser escrito como produto de um número ímpar por uma potência de 2 de uma e uma só maneira, pelo que todos os termos de sucessão $(c_{n,k})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ são nulos, com uma única excepção, que tem o valor 1; logo, $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,k} = 1$. Por outro lado, $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : a_{n,0} = 0$. Então (12) implica que

$$(\forall z \in D(0,1)) : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1-z} \cdot \tag{13}$$

Seja agora K um compacto contido em $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$. Então

$$(\forall z \in K) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2^n}}{z^{-2^{n+1}} - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^{2^n}}{1 - (1/z)^{2^{n+1}}} \cdot \tag{14}$$

Como os números da forma $1/z$, com $z \in K$, formam um compacto contido em $D(0,1)$ então, pelo que foi visto acima, a convergência é uniforme. Além disso, resulta de (13) e dos cálculos efectuados em (14) que

$$\left(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}\right) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = -\frac{1/z}{1 - 1/z} = \frac{1}{1-z} \cdot$$

Finalmente, se K for um compacto de $\mathbb{C} \setminus S^1$, então K é a reunião de um compacto de $D(0,1)$ com um compacto de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$; como a convergência é uniforme em cada um daqueles compactos, é uniforme em K.

Exercício nº49

Para ver que a primeira condição implica a segunda, basta observar que, fixado $z \in \mathbb{C}$, se se tomar $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $D(z,\varepsilon) \subset U$, então, visto que o disco $D(z,\varepsilon)$ é simplesmento conexo, o integral de f ao longo de qualquer lacete cujo traço esteja nele contido é nulo.

Suponha-se agora que se verifica a segunda condição do enunciado. Seja $z \in U$ e seja $\varepsilon_z \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $D(z,\varepsilon_z) \subset U$ e que, para cada lacete γ cujo traço esteja contido em $D(z,\varepsilon_z)$, se tenha $\int_\gamma f = 0$. Então, em particular, se $z_1, z_2, z_3 \in D(z,\varepsilon_z)$ tem-se $\int_{[z_1,z_2]\vee[z_2,z_3]\vee[z_3,z_1]} f = 0$. Logo, pelo teorema de Morera, $f|_{D(z,\varepsilon_z)}$ é analítica. Deduz-se então da segunda alínea da proposição 2.4.1 que f é analítica.

Exercício nº51

Sejam $V = f(U)$ e $f^{-1} : V \longrightarrow U$ a inversa de f. A função f^{-1} é contínua; de facto, se A for um aberto de $\mathbb{C}$, então $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A)$ e, uma vez que f é injectiva e analítica então, pelo teorema da função aberta, $f(A)$ é um aberto. Logo, pela proposição 2.1.6, f^{-1} é derivável. Como, além disso, V é um aberto de $\mathbb{C}$ (novamente pelo teorema da função aberta), f^{-1} é holomorfa. Logo, é analítica, pelo teorema 3.3.4.

Exercício nº55

Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial x}(v - w) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

que

$$\frac{\partial}{\partial y}(v - w) = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$$

e que U é conexo, $v - w$ é constante.