Introdução à TOPOLOGIA

José Carlos Santos

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Agosto de 2017

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Observações

Estes apontamentos são dirigidos aos alunos de Elementos de Topologia e são parcialmente baseados nos apontamentos redigidos pelo doutor Manuel Ricardo Falcão Moreira quando regeu a cadeira nos anos lectivos 1995–96 e 1996–97.

São empregues as seguintes notações:

$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathcal{P}(E)$	{partes de E}

Vai-se considerar em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a relação de ordem $\leqslant$ que prolonga a relação de ordem $\leqslant$ de $\mathbb{R}$ e para a qual se tem:

$$(\forall r \in \mathbb{R}) : -\infty \leqslant r \leqslant +\infty.$$

Sempre que se falar de supremo ou ínfimo de uma parte de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ será relativamente a esta relação de ordem. Observe-se que, com esta convenção, qualquer parte de $\mathbb{R}$ tem supremo e ínfimo.

Um conjunto C dir-se-á numerável quando C for finito ou quando existir alguma bijeção de $\mathbb{N}$ em C. Isto equivale a afirmar que existe alguma função sobrejectiva de $\mathbb{N}$ em C.

A existência ao lado de um parágrafo do símbolo ampliado, tal como aquele que se encontra ao lado deste parágrafo, deve ser interpretado como querendo significar «curva perigosa»; é conveniente ler-se atentamente a passagem em questão.

Índice

Lista de Figuras

Capítulo 1

Espaços métricos

1.1 Definições e propriedades elementares

1.1.1 Métricas e pseudo-métricas

Definição 1.1.1 Seja E um conjunto. Diz-se que $d\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma *pseudo-métrica* se satisfizer as condições

1. $(\forall x \in E) : d(x, x) = 0$;
2. $(\forall x, y \in E) : d(x, y) = d(y, x)$;
3. $(\forall x, y, z \in E) : d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular);

se for esse o caso e se a função d não só satisfaz a condição 1, como também satisfaz a condição mais forte

1′. $(\forall x, y \in E) : d(x, y) = 0 \iff x = y$,

então diz-se que d é uma *métrica* ou uma *distância*.

A figura 1.1 na página seguinte ilustra o significado geométrico da desigualdade triangular.

Exemplo 1.1.1 Naturalmente, se E for um conjunto, então a função nula de $E \times E$ em $\mathbb{R}_+$ é uma pseudo-métrica, a qual se designa por *pseudo-métrica grosseira*.

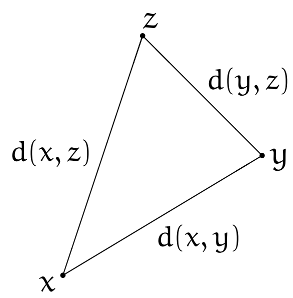

Figura 1.1: A desigualdade triangular afirma que a distância de um ponto x a um ponto y nunca excede a soma das distâncias daqueles pontos a um terceiro ponto z.

Exemplo 1.1.2 Um pouco mais interessante, fixado um conjunto E, é a *métrica discreta*:

$$\begin{aligned} d\colon\ E\times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\rightsquigarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x\neq y \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.3 Se $n \in \mathbb{N}$, então é usual considerar-se em $\mathbb{K}^n$ a métrica definida por

$$\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) \rightsquigarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2}.$$

Exemplo 1.1.4 Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. Se $r \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, então r pode ser escrito sob a forma

$$r = p^n \cdot \frac{a}{b}$$

com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $(a,p) = (b,p) = 1$ e $n \in \mathbb{Z}$; além disso, n é único. Seja $\nu_p(r) = n$. Se $r, s \in \mathbb{Q}$ define-se

$$d_p(r,s) = \begin{cases} p^{-\nu_p(r-s)} & \text{se } r\neq s \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então d_p é uma métrica, que se designa por *métrica* p-*ádica*.

Exemplo 1.1.5 Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}_l(X)$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{C}$. Neste conjunto pode-se definir a métrica

$$\begin{array}{rccc} d_\infty\colon & \mathcal{F}_l(X)\times\mathcal{F}_l(X) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (f,g) & \rightsquigarrow & \sup\limits_{x\in X}\bigl|f(x)-g(x)\bigr|, \end{array}$$

que se costuma designar por «métrica do supremo».

Exemplo 1.1.6 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $\mathcal{R}([a,b])$ o conjunto das funções integráveis segundo Riemann de $[a,b]$ em $\mathbb{C}$.[1] Neste conjunto pode-se definir a pseudo-métrica

$$\begin{array}{rccc} d_1\colon & \mathcal{R}([a,b])\times\mathcal{R}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (f,g) & \rightsquigarrow & \displaystyle\int_a^b\bigl|f(x)-g(x)\bigr|\,dx, \end{array}$$

que se costuma designar por «métrica do integral».

Uma «fonte» de métricas são os espaços vectoriais normados.

Definição 1.1.2 Se V for um espaço vectorial real ou complexo, diz-se que uma função

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ v & \rightsquigarrow & \|v\| \end{array}$$

é uma *norma* se

1. $(\forall v \in V) : \|v\| = 0 \iff v = 0$;
2. $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall v \in V) : \|\alpha v\| = |\alpha|.\|v\|$;
3. $(\forall v, w \in V) : \|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (desigualdade triangular).

Diz-se então que $(V, \|\cdot\|)$ é um *espaço vectorial normado*.

Verifica-se facilmente que se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço vectorial normado, então

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (v,w) & \rightsquigarrow & \|v-w\| \end{array} \tag{1.1}$$

[1] Uma função f de $[a,b]$ em $\mathbb{C}$ diz-se *integrável segundo Riemann* se as funções $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ forem integráveis segundo Riemann.

é uma métrica; diz-se que esta métrica provém da norma $\|\cdot\|$. Dos exemplos vistos atrás, a métrica do exemplo 1.1.3 provém da norma usual

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x_1,\ldots,x_n) & \rightsquigarrow & \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}. \end{array}$$

A métrica do supremo também é proveniente de uma norma. Analogamente, a métrica do integral seria proveniente de uma norma caso se tivesse considerado apenas o conjunto das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{C}$. Sempre que se estiver a trabalhar com um espaço vectorial normado $(V,\|\cdot\|)$ será a métrica definida por (1.1) que será aí considerada, a menos que seja dito expressamente o contrário.

Em geral, num conjunto E podem-se definir muitas métricas distintas. Em $\mathbb{K}^n$ podem-se considerar, por exemplo, as métricas definidas por

$$d_1\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) = \sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|$$

ou por

$$d_\infty\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) = \max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j-y_j|$$

que não só são distintas como também são ambas diferentes da métrica usual (i. e., da métrica do exemplo 1.1.3).

1.1.2 Definição de espaço métrico

Definição 1.1.3 Um *espaço métrico* é um par ordenado (E,d), onde d é uma métrica definida em $E\times E$.

Naturalmente, poderia definir-se a noção de espaço pseudo-métrico de maneira análoga, mas quando se trabalha com uma pseudo-métrica $d\colon E\times E\longrightarrow\mathbb{R}_+$ é mais frequente recorrer-se à seguinte construção: considera-se em E a relação de equivalência $\sim$ definida por

$$x\sim y \iff d(x,y)=0;$$

se se definir no conjunto $E/\sim$ das classes de equivalência a função

$$\begin{array}{cccc} \tilde{d}\colon & (E/\sim)\times(E/\sim) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \big([x],[y]\big) & \rightsquigarrow & d(x,y), \end{array}$$

então $\tilde{d}$ é uma métrica. Considera-se então o espaço métrico $(E/\sim, \tilde{d})$ e é mesmo frequente usar-se o mesmo símbolo para d e $\tilde{d}$. É claro que se d já for uma métrica, então $(E, d) = (E/\sim, \tilde{d})$.[2]

Quando não há risco de ambiguidade, faz-se referência ao «espaço métrico E» e não ao «espaço métrico (E, d)». Por outro lado, é usual dizer-se que a métrica d está definida em E embora, naturalmente, o domínio de d seja $E \times E$.

Definição 1.1.4 Se (E, d) é um espaço métrico e $A, B \subset E$ então a *distância de* A *a* B define-se por

$$D(A, B) = \begin{cases} \inf\{\, d(a, b) \mid a \in A, b \in B \,\} & \text{se } A, B \neq \emptyset \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe-se que se $a, b \in E$, então $D(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$. O número $D(A, B)$ deve ser encarado como a menor distância possível entre dois elementos de E (veja-se a figura 1.2 na próxima página), mas observe-se que não existem necessariamente elementos $a \in A$ e $b \in B$ tais que $d(a, b) = D(A, B)$; por exemplo, em $\mathbb{R}$ com a métrica usual tem-se $D(]-1, 0[,]0, 1[) = 0$, mas não existem pontos $x \in]-1, 0[$ e $y \in]0, 1[$ com $|x - y| = 0$. Repare-se que, em geral, D não é uma métrica em $\mathcal{P}(E)$ (e nem mesmo uma pseudo-métrica). Se $a \in E$ e $A \subset E$, $D(\{a\}, A)$ também se designa por *distância de* a *a* A.

Se (E, d) é um espaço métrico e se $F \subset E$, então a restrição a $F \times F$ da métrica d continua a ser uma métrica, pelo que é natural a seguinte

Definição 1.1.5 Um *sub-espaço métrico* de um espaço métrico (E, d), é um espaço métrico (F, d') onde $F \subset E$ e d' é a restrição a $F \times F$ de d.

1.2 Funções contínuas

1.2.1 Caso geral

Definição 1.2.1 Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) espaços métricos e seja $a \in E_1$. Diz-se que uma função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é *contínua em* a se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) : d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

caso contrário, diz-se que f é *descontínua* em a. Se $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ for contínua em todos os pontos de E_1, diz-se que f é *contínua*; caso contrário, diz-se que f é *descontínua*.

[2]Naturalmente, isto não é literalmente verdade. Só se tem $E = E/\sim$ quando $E = \emptyset$; caso contrário $E/\sim = \{\, \{x\} \mid x \in E \,\}$.

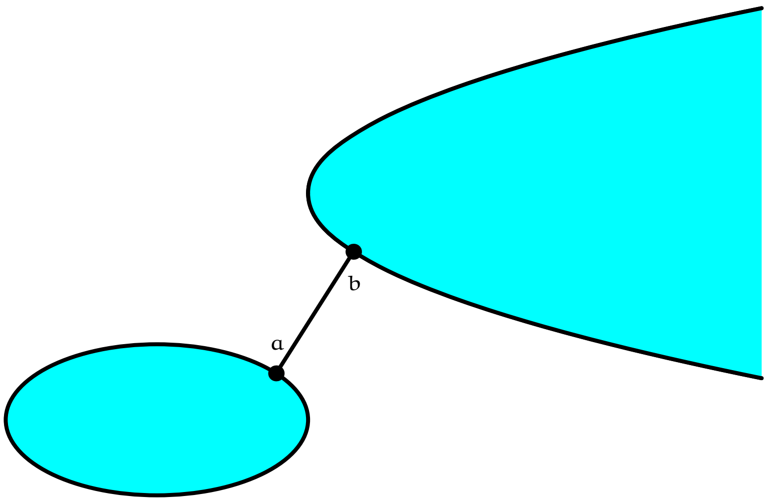

Figura 1.2: Neste exemplo, os pontos a e b são tais que a distância de a a b é a menor possível entre dois elementos dos conjuntos sombreados (relativamente à métrica usual em $\mathbb{R}^2$), pelo que a distância entre os conjuntos é igual ao comprimento do segmento que une a a b.

Antes de dar exemplos, é conveniente fazer a seguinte observação: se E_1 e E_2 são conjuntos e $a \in E_1$, só faz sentido investigar se f é contínua em a se se estiverem a considerar métricas d_1 e d_2 definidas em E_1 e em E_2 respectivamente. Para simplificar a exposição é usual escrever-se «a função $f\colon (E_1, d_1) \longrightarrow (E_2, d_2)$ é contínua no ponto a» em vez de «a função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é contínua no ponto a se se considerar em E_1 (respectivamente E_2) a métrica d_1 (resp. d_2)». Naturalmente, isto é um abuso de linguagem; o domínio de f é o conjunto E_1 e não o par ordenado (E_1, d_1).

Exemplo 1.2.1 Se E é um espaço métrico, a função identidade de E em E é contínua; basta tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de função contínua.

Exemplo 1.2.2 Uma função constante entre dois espaços métricos é contínua.

Exemplo 1.2.3 Se E é um espaço métrico discreto (i. e. um espaço métrico cuja métrica é a métrica discreta) e E' é um espaço métrico qualquer, então qualquer função $f\colon E \longrightarrow E'$ é contínua; basta tomar $\delta = 1$ na definição de função contínua.

Exemplo 1.2.4 Se se considerar em $\mathbb{R}$ a métrica usual e a métrica discreta (representadas por d e d' respectivamente), então a função

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d')$$

é descontínua em todos os pontos do domínio.

Exemplo 1.2.5 Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F}_l(X)$ o espaço das funções limitadas de X em $\mathbb{K}$, munido da métrica do supremo. Então, para cada $x \in X$, a função

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_l(X) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

é contínua em cada $f \in \mathcal{F}_l(X)$, pois, se $g \in \mathcal{F}_l(X)$,

$$\left|f(x) - g(x)\right| \leqslant \sup_{y \in X}\left|f(y) - g(y)\right| = d_\infty(f, g),$$

pelo que, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, se se tomar $\delta = \varepsilon$ tem-se

$$d_\infty(f, g) < \delta \iff \sup_{y \in X}\left|f(y) - g(y)\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|f(x) - g(x)\right| < \varepsilon.$$

Proposição 1.2.1
Se (E_1, d_1), (E_2, d_2) e (E_3, d_3) são espaços métricos, a é um ponto de E_1, $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é uma função contínua em a e $g\colon E_2 \longrightarrow E_3$ é uma função contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Demonstração: Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se encontrar $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in E_1) : d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_3\big((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)\big) < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Basta escolher $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in E_2) : d_2\big(x, f(a)\big) < \eta \Longrightarrow d_3\big(g(x), g(f(a))\big) < \varepsilon \tag{1.3}$$

e escolher $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in E_1) : d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2\big(f(x), f(a)\big) < \eta. \tag{1.4}$$

Deduz-se então de (1.3) e de (1.4) que se tem (1.2). ∎

Corolário 1.2.1
Se E_1, E_2 e E_3 são espaços métricos e

$$f\colon E_1 \longrightarrow E_2 \text{ e } g\colon E_2 \longrightarrow E_3$$

são funções contínuas, então $g \circ f$ também é contínua.

1.2.2 Tipos particulares de funções contínuas

Isometrias

Definição 1.2.2 Diz-se que uma função $f\colon (E_1, d_1) \longrightarrow (E_2, d_2)$ entre espaços métricos é uma *isometria* se for uma bijecção e se

$$(\forall x, y \in E_1) : d_2\big(f(x), f(y)\big) = d_1(x, y).$$

Naturalmente, a inversa de uma isometria também é uma isometria.

Exemplo 1.2.6 Relativamente à métrica usual, a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightsquigarrow & (-y, x) \end{array}$$

é uma isometria. Geometricamente, trata-se de uma rotação do plano.

Exemplo 1.2.7 Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja

$$\begin{array}{rccc} f_n\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 1 & \text{se } x = n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Se encararmos o conjunto $\{\, f_n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ como um sub-espaço métrico de $\mathcal{F}_l(\mathbb{R})$ (veja-se o exemplo 1.1.5), então a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{\, f_n \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \\ n & \rightsquigarrow & f_n \end{array}$$

é uma isometria relativamente à métrica discreta em $\mathbb{Z}$.

Homeomorfismos

Definição 1.2.3 Diz-se que uma função $f\colon (E_1, d_1) \longrightarrow (E_2, d_2)$ entre espaços métricos é um *homeomorfismo* se for uma bijeção contínua e se a inversa também for contínua.

É claro que qualquer isometria é um homeomorfismo, mas há homeomorfismos que não são isometrias, como, por exemplo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^3, \end{array}$$

relativamente à métrica usual.

Observe-se que uma bijecção contínua não é necessariamente um homeomorfismo. Por exemplo, se se considerar a função identidade de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sendo a métrica do domínio a métrica discreta e a do conjunto de chegada a métrica usual, então tem-se uma bijecção contínua; no entanto, a função inversa é descontínua em todos os pontos do domínio (como foi mencionado no exemplo 1.2.4).

Continuidade uniforme

Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) espaços métricos e f uma função de E_1 em E_2. Quem examinar a definição de função contínua vê que afirmar que f é contínua é o mesmo que afirmar que, dados $a \in E_1$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, existe algum δ *dependente de* a *e de* ε tal que

$$(\forall x \in E_1) : d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Em alguns casos, é possível, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, escolher um δ que depende unicamente de ε para qual se tem (1.5) qualquer que seja $a \in E_1$.

Definição 1.2.4 Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) espaços métricos e f uma função de E_1 em E_2. Diz-se que f é *uniformemente contínua* se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x, y \in E_1) : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Exemplo 1.2.8 Se (E_1, d_1) e (E_2, d_2) são espaços métricos, sendo d_1 a métrica discreta, então qualquer função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é uniformemente contínua; basta tomar $\delta = 1$ na definição de continuidade uniforme.

Exemplo 1.2.9 A função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}$$

é contínua mas não é uniformemente contínua. Para o demonstrar, fixe-se $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Toma-se $x = 1/\delta$ e $y = x + \delta/2$. Então $|x - y| = \delta/2 < \delta$ e

$$\begin{aligned} |x^2 - y^2| &= \left| \frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right| \\ &= 1 + \frac{\delta^2}{4} \\ &> 1. \end{aligned}$$

Veja-se também a figura 1.3 na página seguinte.

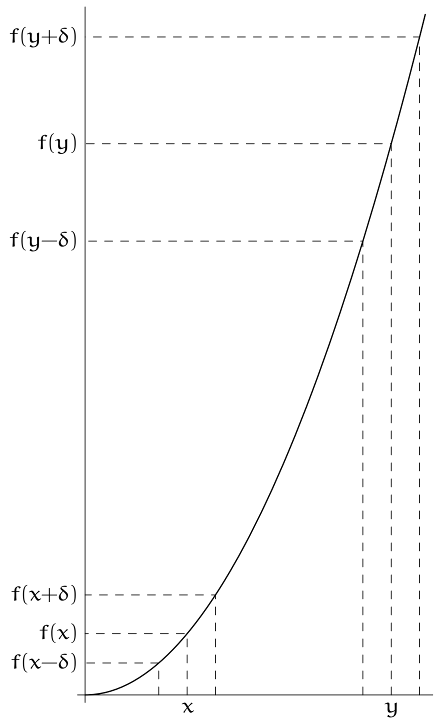

Figura 1.3: Neste exemplo, os intervalos $]x-\delta, x+\delta[$ e $]y-\delta, y+\delta[$ têm a mesma amplitude, mas são enviados em intervalos de amplitudes bastante diferentes. Quanto mais y se deslocar para a direita mais a diferença se acentua, acabando por ser tão grande quanto se queira. Consequentemente, não é possível encontrar nenhum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(]x-\delta, x+\delta[) \subset]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.10 A função de $\mathcal{F}_l(X)$ em $\mathbb{K}$ definida no exemplo 1.2.5 é uniformemente contínua pois, como foi ali visto, basta tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de continuidade uniforme.

1.3 Abertos e fechados num espaço métrico

Definição 1.3.1 Sejam (E, d) um espaço métrico, $a \in E$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$. Designa-se por *bola aberta de centro* a *e raio* r e representa-se por $B(a, r)$ o conjunto $\{x \in E \mid d(x, a) < r\}$; designa-se por *bola fechada de centro* a *e raio* r e representa-se por $B'(a, r)$ o conjunto $\{x \in E \mid d(x, a) \leqslant r\}$.

Usualmente, quando se está a trabalhar em sub-conjuntos de $\mathbb{R}^2$ (com a métrica usual) emprega-se o termo «disco» em vez de «bola».

Observe-se que a noção de função contínua pode ser redefinida em termos de bolas abertas. De facto, se (E_1, d_1) e (E_2, d_2) são espaços métricos então, dados $x \in E_1$ e uma função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$, dizer que f é contínua em x é o mesmo que dizer que

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) : B(x, \delta) \subset f^{-1}\big(B\big(f(x), \varepsilon\big)\big).$$

Definição 1.3.2 Seja (E, d) um espaço métrico e seja $X \subset E$.

1. Diz-se que X é *aberto* se
$$(\forall x \in X)(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*) : B(x, \varepsilon) \subset X.$$
2. Diz-se que X é *fechado* se $X^{\complement}$ for aberto.

Exemplo 1.3.1 Se E for um espaço métrico discreto, então qualquer parte de E é aberta (e, consequentemente, qualquer parte de E é fechada), uma vez que, se $A \subset E$ e se $a \in A$, então $B(a, 1) = \{a\} \subset A$.

Exemplo 1.3.2 Qualquer bola aberta de um espaço métrico (E, d) é um aberto de E. De facto, sejam $x \in E$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dado $y \in B(x, \varepsilon)$ pretende-se mostrar que existe algum $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $B(y, \varepsilon') \subset B(x, \varepsilon)$. Para tal, basta tomar $\varepsilon' = \varepsilon - d(x, y)$, pois tem-se

$$\begin{aligned} u \in B(y, \varepsilon') &\Longleftrightarrow d(u, y) < \varepsilon - d(x, y) \\ &\Longrightarrow d(x, u) \leqslant d(x, y) + d(y, u) < \varepsilon; \end{aligned}$$

esta demonstração é ilustrada pela figura 1.4.

Exemplo 1.3.3 Qualquer bola fechada de um espaço métrico (E, d) é um fechado de E. Para o demonstrar, sejam $x \in E$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que o conjunto $\{\, y \in E \mid d(x, y) > \varepsilon \,\}$ é um aberto. Seja y um elemento desse conjunto e seja $\varepsilon' = d(x, y) - \varepsilon$; então

$$B(y, \varepsilon') \subset \{\, y \in E \mid d(x, y) > \varepsilon \,\}.$$

Exemplo 1.3.4 Se (E, d) for um espaço métrico e se $x \in E$, então $\{x\}$ é um fechado de E, pois se $y \in E \setminus \{x\}$, então $x \notin B\big(y, d(x, y)\big)$, ou seja, $B\big(y, d(x, y)\big) \subset E \setminus \{x\}$.

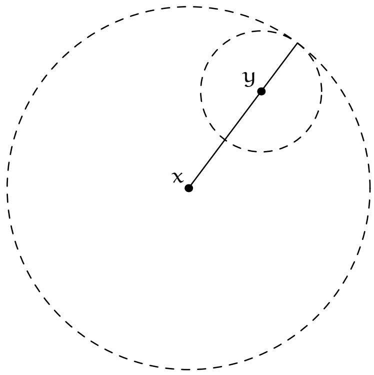

Figura 1.4: Ilustração da justificação de que os discos abertos de um espaço métrico são abertos.

Exemplo 1.3.5 Um sub-conjunto de um espaço métrico pode não ser aberto nem ser fechado. Por exemplo, relativamente à métrica usual de $\mathbb{R}$, $[0,1[$ não é aberto (porque nenhuma bola aberta centrada em 0 está contida em $[0,1[$) nem é fechado (porque nenhuma bola aberta centrada em 1 está contida em$[0,1[^{\complement} =]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$).

Não só um sub-conjunto de um espaço métrico pode não ser aberto nem ser fechado como também pode ser as duas coisas ao mesmo tempo, como se vê pela primeira alínea do próximo teorema.

Teorema 1.3.1
Seja (E,d) *um espaço métrico.*

1. *Os conjuntos* $\emptyset$ *e* E *são simultanemente abertos e fechados em* E.
2. *Se* $(A_j)_{j\in J}$ *for uma família de abertos (respectivamente fechados) de* E*, então o conjunto* $\bigcup_{j\in J} A_j$ *(resp.* $\bigcap_{j\in J} A_j$*) é um aberto (resp. fechado) de* E.
3. *Se* $(A_j)_{j\in J}$ *for uma família de abertos (respectivamente fechados) de* E *e se* J *for finito, então o conjunto* $\bigcap_{j\in J} A_j$ *(resp.* $\bigcup_{j\in J} A_j$*) é um aberto (resp. fechado) de* E.

Demonstração: A primeira alínea é trivial.

Se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de abertos de E e se $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$, então $x \in A_j$ para algum $j \in J$, pelo que, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$B(a,\varepsilon) \subset A_j \subset \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de fechados de E, então

$$\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)^{\complement} = \bigcup_{j\in J}\left({A_j}^{\complement}\right)$$

que é aberto.

Se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de abertos de E e se J for finito então, se $x \in \bigcap_{j\in J} A_j$, seja, para cada $j \in J$, $\varepsilon_j \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $B(z_j, \varepsilon_j) \subset A_j$. Então

$$B\left(x, \min\{\, \varepsilon_j \mid j \in J\,\}\right) \subset \bigcap_{j\in J} A_j.$$

Finalmente, se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de fechados de E e se J for finito então

$$\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)^{\complement} = \bigcap_{j\in J}\left({A_j}^{\complement}\right)$$

que é aberto. ∎

Uma observação importante referente a esta demonstração é a seguinte: visto que, por definição, um sub-conjunto A de E é fechado se e só se $A^{\complement}$ é aberto, é frequentementemente possível, tal como nas demonstrações das duas últimas alíneas desta proposição, demonstrar uma propriedade relativa a conjuntos fechados recorrendo ao facto de já se ter demonstrado algo análogo referente a abertos. Por esse motivo, não serão explicitadas mais demonstrações deste tipo.

Exemplo 1.3.6 Foi visto (exemplo 1.3.4) que se E for um espaço métrico e se $x \in E$, então $\{x\}$ é um fechado de E. Então se F for uma parte finita de E, como se tem

$$F = \bigcup_{x\in F}\{x\},$$

resulta da terceira alínea do teorema que F é um fechado de E.

Definição 1.3.3 Se (E, d) é um espaço métrico, $x \in E$ e $V \subset E$, diz-se que V é uma *vizinhança* de x se V contém algum aberto A tal que $x \in A$.

Uma consequência imediata desta definição é que, se (E, d) é um espaço métrico, $x \in E$ e V é uma vizinhança de x, então qualquer parte W de E que contenha V também é uma vizinhança de x.

Repare-se que resulta de definição de conjunto aberto que se V é vizinhança de x, então, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $V \supset B(x, \varepsilon)$. Reciprocamente, se V contém algum disco $B(x, \varepsilon)$ (com $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) então, uma vez que $B(x, \varepsilon)$ é um aberto (veja-se o exemplo 1.3.2), V é vizinhança de x.

Exemplo 1.3.7 Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, seja $\mathcal{C}([a, b])$ o espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{C}$. Considere-se neste conjunto a métrica do supremo,[3] seja 0 a função nula e seja

$$V = \left\{ f \in \mathcal{C}([a, b]) \;\middle|\; (\forall x \in [0, 1]) : \left|f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

Então V é uma vizinhança de 0, pois contém a bola $B(0, {}^1\!/_2)$.

Exemplo 1.3.8 Usando as mesmas notações do exemplo anterior, V não é vizinhança de 0 se se estiver a considerar a métrica do integral. De facto, se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, então a função

$$\begin{aligned} f\colon \ [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} 1 - {}^x\!/_\varepsilon & \text{se } x < \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

cujo gráfico pode ser visto na figura 1.5, pertence a $B(0, \varepsilon)$ mas não a V, pois $f(0) = 1$. Logo, V não contém nenhuma bola $B(0, \varepsilon)$.

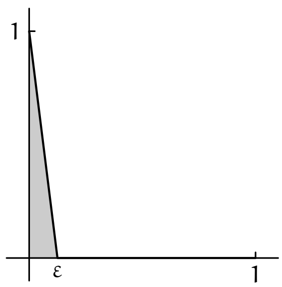

Figura 1.5: A distância $d_1(f, 0)$ é a área da região a sombreado. Como se trata de um triângulo de base ε e altura 1, aquela área é igual a ${}^\varepsilon\!/_2$ e, portanto, é menor do que ε.

[3]É visto nos cursos de Análise Real (e será demonstrado mais à frente) que qualquer função contínua de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é limitada e resulta deste facto que se f for uma função de $[a, b]$ em $\mathbb{C}$ isto ainda é verdade, pois $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{Im}(f)i$.

Exemplo 1.3.9 Relativamente à métrica discreta, uma vez que as bolas $B(x,1)$ são reduzidas a $\{x\}$, o conjunto das vizinhanças de um ponto x é formado por todas as partes de E que contêm x.

Definição 1.3.4 Se E é um espaço métrico, $A \subset E$ e $x \in E$, então diz-se que

1. x é *ponto interior* de A se A for vizinhança de x;
2. x é *ponto aderente* de A se qualquer vizinhança de x intersectar A.

O conjunto dos pontos interiores de A representa-se por $\mathring{A}$ e designa-se por *interior* de A; o conjunto dos pontos aderentes de A representa-se por $\overline{A}$ e designa-se por *aderência* de A.

Observe-se que:

1. afirmar que «x não é ponto aderente de A» é o mesmo que afirmar que «x é ponto interior de A^{C}» ou, posto de outro modo
$$\overline{A}^{\mathsf{C}} = \mathring{A^{\mathsf{C}}}; \tag{1.6}$$
2. $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Exemplo 1.3.10 Em qualquer espaço métrico (E,d), se $x \in E$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ tem-se $\overline{B(x,r)} \subset B'(x,r)$. De facto, se $y \in E \setminus B'(x,r)$, i. e. se $d(x,y) > r$, então $B(y, d(x,y) - r) \cap B(x,r) = \emptyset$, pelo que $y \notin \overline{B(x,r)}$. No entanto, não é verdade em geral que se tenha $\overline{B(x,r)} = B'(x,r)$. Por exemplo, em $\{0,1\}$ tem-se, relativamente à métrica usual, $\overline{B(0,1)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$ e $B'(0,1) = \{0,1\}$.

Exemplo 1.3.11 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Considere-se o espaço métrico $\mathcal{F}_l([a,b])$ (veja-se o exemplo 1.1.5) e o conjunto $\mathcal{C}([a,b])$ (veja-se a definição 1.3.7). Vai-se mostrar que este conjunto tem interior vazio e que é igual à sua própria aderência.[4]

1. O interior de $\mathcal{C}([a,b])$ é vazio pois se $f \in \mathcal{C}([a,b])$ e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, então a função
$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} f(x) & \text{se } x > a \\ f(a) + \varepsilon/2 & \text{se } x = a \end{cases} \end{array}$$

[4]Como será visto já a seguir (corolário 1.3.1), um conjunto é igual à própria aderência se e só se for fechado.

pertence a $B(f, \varepsilon)$ mas não é contínua, pelo que $B(f, \varepsilon) \not\subset \mathcal{C}([a, b])$.

2. Já se sabe que $\mathcal{C}([a, b]) \subset \overline{\mathcal{C}([a, b])}$, pelo que, para se provar que $\mathcal{C}([a, b]) = \overline{\mathcal{C}([a, b])}$, basta que se prove que $\mathcal{C}([a, b]) \supset \overline{\mathcal{C}([a, b])}$. Seja $f \in \mathcal{F}_l([a, b]) \setminus \mathcal{C}([a, b])$; vai-se provar que f não adere a $\mathcal{C}([a, b])$, ou seja que existe algum $r \in \mathbb{R}_+*$ tal que $B(f, r)$ não contém nenhuma função contínua. Como f é descontínua, ela é descontínua em algum $c \in [a, b]$ e, portanto, existe algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+*$ tal que

$$(\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in [a, b]) : |x - c| < \delta \wedge \big|f(x) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon.$$

Então $B(f, \varepsilon/3)$ não contém nenhuma função contínua, pois se g estiver naquela bola e se $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, sabe-se que existe algum $x \in [a, b]$ tal que $|x - c| < \delta$ e que $\big|f(x) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon$, pelo que

$$\begin{aligned} \big|g(x) - g(c)\big| &= \big|f(x) - f(c) - \big(f(x) - g(x)\big) + \big(f(c) - g(c)\big)\big| \\ &\geqslant \big|f(x) - f(c)\big| - \big|\big(f(x) - g(x)\big) - \big(f(c) - g(c)\big)\big| \\ &\geqslant \big|f(x) - f(c)\big| - \big|f(x) - g(x)\big| - \big|f(c) - g(c)\big| \\ &\geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Antes de se passar ao próximo enunciado convém fazer a seguinte observação: se E é um conjunto e se $X \subset \mathcal{P}(E)$, não existe necessariamente o «menor elemento de X» (relativamente à inclusão). Por exemplo, se $E = \mathbb{R}$ e se $X = \{$sub-conjuntos infinitos de $\mathbb{R}\}$, então nenhum elemento de X está contido em todos os outros. No entanto, caso X tenha um elemento contido em todos os outros este só poderá ser a intersecção de todos os elementos de X. Analogamente, o «maior elemento de X», caso exista, só poderá ser a reunião de todos os elementos de X.

Proposição 1.3.1
Sejam E um espaço métrico e $X \subset E$. Então

1. *$\mathring{X}$ é aberto e é mesmo o maior aberto de E contido em X;*

2. *$\overline{X}$ é fechado e é mesmo o menor fechado de E que contém X.*

Demonstração: Se A for um aberto contido em X, então, pela definição de vizinhança, A é vizinhança de todos s seus pontos, pelo que X é vizinhança de todos os pontos de A, ou seja, $A \subset \mathring{X}$. Consequentemente

$$\mathring{X} \supset \bigcup_{\substack{A \subset X \\ A \text{ aberto}}} A \tag{1.7}$$

e este último conjunto é aberto, pelo teorema 1.3.1. É claro que se trata do maior aberto de E contido em X. Por outro lado, se $x \in \mathring{X}$ então existe algum aberto A tal que tal que $x \in A$ e $A \subset X$. Logo, a inclusão (1.7) é, de facto, uma igualdade.

A segunda alínea deduz-se da primeira passando aos complementares. ■

Corolário 1.3.1
Sejam E um espaço métrico e $X \subset E$. Então

1. *X é um aberto se e só se $X = \mathring{X}$;*
2. *X é um fechado se e só se $X = \overline{X}$.*

Demonstração: Se X for um aberto, então é necessariamente o maior aberto contido em X, pelo que $X = \mathring{X}$. Por outro lado, se X não for um aberto então, em particular, não poderá ser o maior aberto contido em X, pelo que $X \neq \mathring{X}$.

A demonstração da segunda alínea é análoga. ■

Proposição 1.3.2
Sejam E_1 e E_2 espaços métricos, f uma função de E_1 em E_2 e a um ponto de E_1. São então condições equivalentes:

1. *a função f é contínua em a;*
2. *para cada vizinhança V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a.*

Demonstração: Como foi observado na página 11, f é contínua em a se e só se a imagem recíproca por f de qualquer bola centrada em $f(a)$ contiver uma bola centrada em a. Se esta condição se verificar e se V for uma vizinhança de $f(a)$, então, por definição de vizinhança, V contém alguma bola centrada em $f(a)$, pelo que $f^{-1}(V)$ contém, por hipótese, alguma bola centrada em a; em particular, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a. Reciprocamente, se for verdade que, para cada vizinhança V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a então, em particular, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}\big(B\big(f(a), \varepsilon\big)\big)$ é uma vizinhança de a, pelo que contém alguma bola $B(a, \delta)$. ■

Proposição 1.3.3
Sejam E_1 *e* E_2 *espaços métricos e* f *uma função de* E_1 *em* E_2*. São então condições equivalentes:*

1. *a função* f *é contínua;*
2. *se* A *é um aberto de* E_2*,* $f^{-1}(A)$ *é um aberto de* E_1*;*
3. *se* F *é um fechado de* E_2*,* $f^{-1}(F)$ *é um fechado de* E_1.

Demonstração: Suponha-se que f é contínua e que A é um aberto de E_2; quer-se mostrar que $f^{-1}(A)$ é um aberto de E_1. Para cada $x \in f^{-1}(A)$ seja $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $B(f(x), \varepsilon_x) \subset A$ e seja δ_x tal que

$$B(x, \delta_x) \subset f^{-1}\big(B\big(f(x), \varepsilon_x\big)\big).$$

Então

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B(x, \delta_x) \subset f^{-1}(A),$$

pelo que

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} B(x, \delta_x).$$

Logo, $f^{-1}(A)$ é aberto, pelo teorema 1.3.1. Reciprocamente, se, para qualquer aberto A de E_2, $f^{-1}(A)$ for aberto, sejam $x \in E_1$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que f é contínua em x, ou seja, que

$$B(x, \delta) \subset f^{-1}\big(B\big(f(x), \varepsilon\big)\big) \tag{1.8}$$

para algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Para tal, basta ver que, uma vez que $B\big(f(x), \varepsilon\big)$ é um aberto de E_2 então, por hipótese, $f^{-1}\big(B\big(f(x), \varepsilon\big)\big)$ é um aberto; como este aberto contém x, existe então algum δ para o qual se tem (1.8).

Vai-se agora mostrar que a segunda e a terceira condições do enunciado são equivalentes. Se a segunda condição se verificar, então, se F for um fechado de E_2, $\big(f^{-1}(F)\big)^{\complement} = f^{-1}\big(F^{\complement}\big)$, que é aberto, pelo que $f^{-1}(F)$ é fechado. Mostra-se de maneira análoga que a terceira condição implica a segunda. ∎

Naturalmente, esta demonstração poderia ter sido feita segundo o esquema 1. ⇒ 2. ⇒ 3. ⇒ 1. ou segundo o esquema 1. ⇒ 3. ⇒ 2. ⇒ 1.; será explicado posteriormente qual o motivo pelo qual não se procedeu deste modo.

Definição 1.3.5 Sejam E um espaço métrico e $A \subset E$. Diz-se que A é *denso* se $\overline{A} = E$.

Exemplo 1.3.12 Entre quaisquer dois números reais existe algum número racional; decorre daqui que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ relativamente à métrica usual.

Exemplo 1.3.13 Uma consequência do que foi visto no exemplo 1.3.11 é que o conjunto das funções descontínuas é denso em $\mathcal{F}_l([a,b])$.

Considere-se agora o seguinte problema: se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $a < b$ e se se considerar em $\mathcal{C}([a,b])$ a métrica do supremo, será que as funções polinomiais de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$ formam um sub-conjunto denso? A resposta é afirmativa, mas como é que se pode demonstrar isso? Poder-se-ia pensar em, por exemplo, aproximar cada função $f \in \mathcal{C}([a,b])$ pelos seus polinómios de Taylor, mas mesmo que se tivesse sucesso nisso, essa abordagem só funcionaria para funções indefinidamente deriváveis. Uma alternativa poderia consistir em, para cada $n \in \mathbb{N}$, dividir $[a,b]$ em n sub-intervalos iguais e considerar a única função polinomial $P_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de grau menor ou igual a n que, em cada extremo de cada sub-intervalo, toma o mesmo valor que a função f. No entanto, este método não funciona. Se, por exemplo se considerar a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & [-5,5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \dfrac{1}{1+x^2}, \end{array}$$

não só não se tem $\lim_{n\in\mathbb{N}} P_n = f$ como, de facto, $\lim_{n\in\mathbb{N}} d_\infty(P_n, f) = +\infty$; veja-se a figura 1.6.

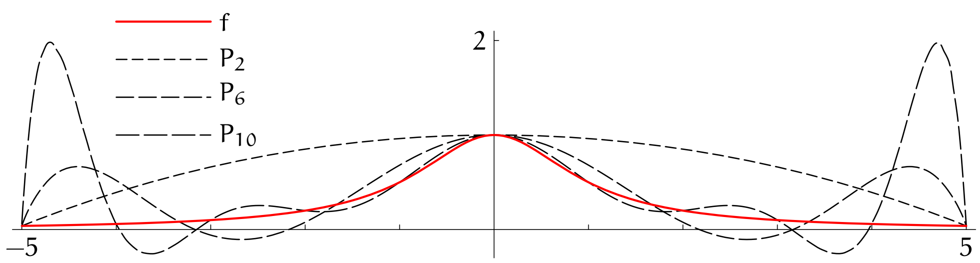

Figura 1.6: Polinómios obtidos por interpolação

Vejamos agora como demonstrar o resultado em questão.

Teorema 1.3.2 (Teorema da aproximação de Weierstrass)
Sejam a *e* b *números reais, com* $a < b$. *As funções polinomiais de* $[a, b]$ *em* $\mathbb{K}$ *formam um sub-conjunto denso de* $\mathcal{C}([a, b])$ *relativamente à métrica do supremo.*

Demonstração: Observe-se que basta fazer a demonstração no caso em que $a = 0$ e $b = 1$. De facto, se o teorema estiver demonstrado neste caso particular então, dada uma função $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ e dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, existe alguma função polinomial $P\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$(\forall x \in [0, 1]) : \left|f\big(a + (b - a)x\big) - P(x)\right| \leqslant \varepsilon,$$

pelo que

$$(\forall x \in [a, b]) : \left|f(x) - P\left(\frac{x - a}{b - a}\right)\right| < \varepsilon.$$

Vai-se então trabalhar no intervalo $[0, 1]$. Comece-se por observar que, visto que $[0, 1]$ é um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e f é contínua, sabe-se que

– existe algum $M \in \mathbb{R}_+^*$ tal que
$$(\forall x \in [0, 1]) : |f(x)| < M. \tag{1.9}$$

– a função f é uniformemente contínua.[5]

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere-se a função polinomial[6]

$$\begin{aligned} P_n\colon \quad [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\rightsquigarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Fixe-se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; vai-se mostrar que, para n suficientemente grande, $\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x) - P_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$, o que equivale a afirmar que $d_\infty(f, P_n) \leqslant \varepsilon$ (veja-se a figura 1.7 na próxima página).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ considere-se a função

$$\begin{aligned} r_{n,k}\colon \quad [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}. \end{aligned}$$

---

[5] Ambos os teoremas mencionados nesta observação são teoremas de Análise Real que serão generalizados posteriormente (corolário 2.5.2 e teorema 2.5.6 respectivamente). Observe-se que o primeiro destes teoremas já tinha sido mencionado no exemplo 1.3.7.

[6] Os polinómios em questão designam-se por «polinómios de Bernstein».

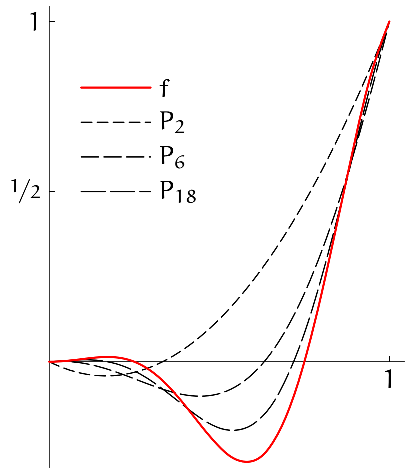

Figura 1.7: Nesta figura, $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^2\cos(2\pi x)$. Como se pode ver, os gráficos dos polinómios de Bernstein vão-se aproximando do de f.

Vai ser conveniente saber que

$$(\forall x \in [0,1])(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} r_{n,k}(x) = 1 \tag{1.10}$$

e que

$$(\forall x \in [0,1])(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 r_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n}. \tag{1.11}$$

Vejamos como justificar isto. Sabe-se que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1.12}$$

A relação (1.10) resulta daqui, tomando $y = 1 - x$. Por outro lado, derivando a relação (1.12) uma vez (respectivamente duas vezes) em ordem à variável x e multiplicando ambos os termos por x (resp. x^2) obtêm-se as relações

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

e

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

das quais resulta que, para cada $x \in [0,1]$ e para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k r_{n,k}(x) = nx$$

e

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_{n,k}(x) = n(n-1)x^2.$$

Então pode-se justificar (1.11) do seguinte modo: se $x \in [0,1]$ e se $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 r_{n,k}(x) = &\\
&= x^2\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}(x) - 2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n} k r_{n,k}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 r_{n,k}(x)\\
&= x^2 - 2x^2 + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} k r_{n,k}(x)\right)\\
&= -x^2 + \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n}\\
&= \frac{x(1-x)}{n}\\
&\leqslant \frac{1}{4n}.
\end{aligned}$$

Seja $M \in \mathbb{R}_+^*$ para o qual seja válida a condição (1.9) e seja $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x, y \in [0,1]) : |x-y| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.13}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
(\forall x \in [0,1]) : \big|f(x) - P_n(x)\big| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) r_{n,k}(x)\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_{n,k}(x).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Se, para cada $x \in [0,1]$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, se definir

$$A_{x,n} = \left\{\, k \in \{0,\dots,n\} \;\middle|\; \left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta \,\right\}$$

e $B_{x,n} = \{0, 1, \ldots, n\} \setminus A_{x,n}$, então, por (1.13),

$$k \in A_{x,n} \Longrightarrow \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in A_{x,n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_{n,k}(x) &< \sum_{k \in A_{x,n}} \frac{\varepsilon}{2} r_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} r_{n,k}(x) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$k \in B_{x,n} \Longleftrightarrow \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \delta \Longleftrightarrow \frac{(x - k/n)^2}{\delta^2} \geqslant 1,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in B_{x,n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_{n,k}(x) &\leqslant 2M \sum_{k \in B_{x,n}} r_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k \in B_{x,n}} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 r_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 r_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{M}{2n\delta^2} \text{ (por (1.11))}
\end{aligned}$$

Logo, a soma (1.14) é majorada por $\varepsilon/2 + M/(2n\delta^2)$, pelo que

$$(\forall x \in [0, 1])(\forall n \in \mathbb{N}) : \left| f(x) - P_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2},$$

de onde decorre que se $n \geqslant M/\delta^2\varepsilon$ se tem

$$(\forall x \in [0, 1]) : \left| f(x) - P_n(x) \right| < \varepsilon.$$ ∎

Observe-se que não é trivial mostrar directamente que existem funções polinomiais arbitrariamente próximas de funções tão simples como

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \sqrt{x} \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & |x|. \end{array}$$

Definição 1.3.6 Seja (E, d) um espaço métrico. Se A é um sub-conjunto de E, define-se o *diâmetro* de A como sendo $\sup\{\, d(x,y) \mid x, y \in A \,\}$ caso $A \neq \emptyset$ e 0 caso contrário. Se o diâmetro de A (que será representado por $\operatorname{diam}(A)$) for finito, diz-se que A é *limitado*. Se X for um conjunto diz-se que uma função de X em E é *limitada* se a sua imagem for um conjunto limitado.

Exemplo 1.3.14 Num espaço métrico discreto qualquer parte é limitada, pois o diâmetro de qualquer conjunto com mais do que um ponto é igual a 1.

Exemplo 1.3.15 Qualquer bola é limitada, pois o seu diâmetro nunca excede o dobro do raio (mas pode ser menor).

1.4 Sucessões

A noção de sucessão que vai ser empregue é a seguinte:

Definição 1.4.1 Uma *sucessão* é uma função cujo domínio é um conjunto da forma $\{\, n \in \mathbb{Z}_+ \mid n \geqslant k \}$, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$.

Geralmente, as sucessões com que se irá trabalhar terão por domínio $\mathbb{N}$. Para simplificar, nos enunciados e nas definições o domínio das sucessões será sempre $\mathbb{N}$.

1.4.1 Sucessões convergentes

Definição 1.4.2 Sejam (E, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E. Diz-se que a sucessão é *convergente* se, para algum $l \in E$, se tiver

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon;$$

diz-se então que l é *limite* da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e representa-se

$$l = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não for convergente diz-se que é *divergente*.

Repare-se que afirmar que, num espaço métrico (E, d), uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l é equivalente a afirmar que a sucessão $(d(x_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $\mathbb{R}$ relativamente à métrica usual.

Exemplo 1.4.1 Em qualquer espaço métrico E, se $l \in E$ então qualquer sucessão constante que tome sempre o valor l converge para l e, mais geralmente, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for tal que $x_n = l$ para n suficientemente grande, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l.

Exemplo 1.4.2 Num espaço métrico discreto E, uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $l \in E$ se e só se $x_n = l$ para n suficientemente grande.

Exemplo 1.4.3 A demonstração do teorema da aproximação de Weierstrass consistiu em construir uma sucessão $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções polinomiais que converge para a função f.

Exemplo 1.4.4 Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\begin{array}{rccc} f_n\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 2nx & \text{se } x < 1/2n \\ 2 - 2nx & \text{se } x \in [1/2n, 1/n] \\ 0 & \text{se } x > 1/n \end{cases} \end{array}$$

(veja-se a figura 1.8). A sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encarada como uma sucessão de elementos de $\mathcal{C}([0,1])$, é convergente (para a função nula) relativamente à métrica do integral, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n| = \int_0^1 f_n = \frac{1}{2n}.$$

Em contrapartida, a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente relativamente à métrica do supremo. Com efeito, se convergisse para uma função $f \in \mathcal{C}([0,1])$, então tinha-se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

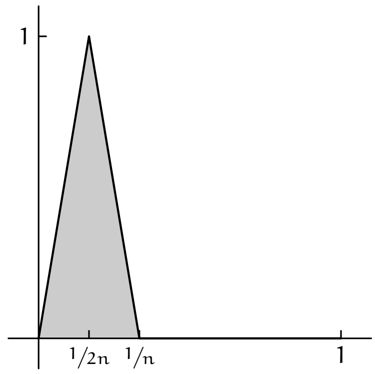

Figura 1.8: Gráfico de f_n ($n \in \mathbb{N}$). A distância de f_n à função nula relativamente à métrica do integral é a área do triângulo a sombreado, ou seja, é igual a $1/2n$.

Mas então, para cada $x \in [0,1]$,

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x)$. Mas $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = 0$, seja qual for $x \in [0,1]$, pois

– se $x = 0$, $(\forall n \in \mathbb{N}) : f_n(x) = 0$;

– se $x > 0$, então $f_n(x) = 0$ quando $1/n \leqslant x$.

Logo, se a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fosse convergente, o seu limite só poderia ser a função nula. Isso não é possível, pois $(\forall n \in \mathbb{N}) : d_\infty(f_n, 0) = 1$ (veja-se a figura 1.8).

Uma sucessão pode ser convergente num espaço métrico e ser divergente num sub-espaço métrico. Por exemplo, a sucessão $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\mathbb{R}$ (relativamente à métrica usual) mas é divergente no sub-espaço $\mathbb{R}_+^*$.

Proposição 1.4.1
Num espaço métrico, uma sucessão convergente não pode ter mais do que um limite.

Demonstração: Sejam (E, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão convergente de elementos de E. Se a sucessão tivesse dois limites distintos l_1 e l_2, então existiria um número natural p_1 (respectivamente p_2)

tal que, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p_1$ (resp. $n \geqslant p_2$), então $d(x_n, l_1) < d(l_1, l_2)/2$ (resp. $d(x_n, l_2) < d(l_1, l_2)/2$). Logo, para $n = \max\{p_1, p_2\}$ ter-se-ia

$$d(l_1, l_2) \leqslant d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) < \frac{d(l_1, l_2)}{2} + \frac{d(l_1, l_2)}{2} = d(l_1, l_2)$$

o que é absurdo. ■

Em geral, os conceitos que foram vistos até aqui continuam a fazer sentido se se estiver a trabalhar com pseudo-métricas e os enunciados permanecem válidos. A proposição 1.4.1 é uma excepção, pois se a distância entre dois pontos distintos for 0, então qualquer sucessão convergente para um deles também converge para o outro.

Proposição 1.4.2
Qualquer sucessão convergente é limitada.

Demonstração: Seja (E, d) o espaço métrico em questão e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente de elementos de E, sendo l o seu limite. Então existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant p \Longrightarrow d(x_n, l) < 1$. Seja $M = \max\{\, d(x_n, l) \mid n \leqslant p \,\}$. Tem-se

$$\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subset B'(l, \max\{1, M\})$$

e este último conjunto é limitado. ■

Definição 1.4.3 Uma sub-sucessão de uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão da forma $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sendo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \rightsquigarrow & n_k \end{array}$$

uma função estritamente crescente.

Proposição 1.4.3
Num espaço métrico, se uma sucessão convergir, então qualquer sua sub-sucessão converge para o mesmo limite.

Demonstração: Sejam (E, d) o espaço métrico em questão e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente de elementos de E, sendo l o seu limite. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Visto que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l, existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant p \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$. Como a sucessão $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e, obviamente, não é limitada, existe algum $p' \in \mathbb{N}$ tal que $k \geqslant p' \Longrightarrow n_k \geqslant p \Longrightarrow d(l, x_{n_k}) < \varepsilon$. ■

Esta proposição é frequentemente empregue para mostrar que certas sucessões são divergentes mostrando que têm sub-sucessões convergentes com limites distintos.

Exemplo 1.4.5 Se se considerar em $\mathcal{F}_l(\mathbb{R})$ a sucessão $\left(\operatorname{sen}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, então esta sucessão diverge relativamente à métrica do supremo (ou qualquer outra métrica que se esteja a considerar) pois as sub-sucessões $\left(\operatorname{sen}^{(4n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $\left(\operatorname{sen}^{(4n+1)}\right)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ são constantes e convergem respectivamente para a função seno e para a função cosseno.

Proposição 1.4.4
Sejam E um espaço métrico e X uma parte de E. Então $\overline{X}$ é igual ao conjunto dos pontos de E que são limite de alguma sucessão de elementos de X.

Demonstração: Se $x \in \overline{X}$, então qualquer bola centrada em x intersecta X. Em particular, pode-se definir uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhendo[7], para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X \cap B(x, 1/n)$. É então claro que $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$.

Reciprocamente, se $l \in E$ e l for limite de alguma sucessão de elementos de X então, pela definição de sucessão convergente, qualquer bola centrada em x contém termos da sucessão e, em particular, intersecta X, pelo que $l \in \overline{X}$. ■

Repare-se que o enunciado anterior é natural, pois, dado $l \in E$, tanto a condição «$l \in \overline{X}$» quanto a condição «l é limite de uma sucessão de elementos de X» exprimem a mesma ideia: que é possível encontrar pontos de X tão perto quanto se queira de l.

Corolário 1.4.1
Seja X um sub-conjunto de um espaço métrico. São condições equivalentes:

1. *o conjunto X é fechado;*
2. *o limite de qualquer sucessão convergente de elementos de X pertence a X.*

[7] Quem alguma vez tenha tido contacto com o «axioma da escolha» poderá querer saber se estará de algum modo relacionado com estas escolhas. A resposta é afirmativa.

Demonstração: Suponha-se que X é fechado. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão convergente de elementos de X e se l for o seu limite, então, pela proposição anterior, $l \in \overline{X}$ e, pela proposição 1.3.1, $\overline{X} = X$, pelo que $l \in X$.

Por outro lado, se X não for fechado então, novamente pela proposição 1.3.1, $X \neq \overline{X}$. Se $l \in \overline{X} \setminus X$ então, pela proposição anterior, l é limite de alguma sucessão de elementos de X. ∎

Proposição 1.4.5
Sejam E_1 e E_2 espaços métricos, f uma função de E_1 em E_2 e $a \in E_1$. São então condições equivalentes:

1. *a função f é contínua em a;*
2. *se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de elementos de E_1 convergente para a, então a sucessão $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(a)$.*

Demonstração: Sejam d_1 e d_2 as métricas definidas em E_1 e em E_2 respectivamente.

Se f for contínua em a e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, sabe-se que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in E_1) : d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon$$

e que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow d_1(a_n, a) < \delta.$$

Então

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow d_2\big(f(a_n), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Por outro lado, se f não for contínua em a então existe algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in E_1) : d_1(x, a) < \delta \wedge d_2\big(f(x), f(a)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Pode-se então definir uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in B(a, 1/n)$ tal que $d_2(f(a_n), f(a)) \geqslant \varepsilon$. A sucessão assim obtida converge para a mas a sucessão $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f(a)$ uma vez que nenhum dos seus termos pertence à bola $B\big(f(a), \varepsilon\big)$. ∎

Exemplo 1.4.6 Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F}_l(X)$ o espaço das funções limitadas de X em $\mathbb{K}$, munido da métrica do supremo. Foi visto, no exemplo 1.2.5, que, para cada $x \in X$, a função

$$\begin{array}{rccc} F_x\colon & \mathcal{F}_l(X) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

é contínua. Mas então, sempre que alguma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}_l(X)$ converge para uma função $f \in \mathcal{F}_l(X)$ tem-se, para cada $x \in X$,

$$f(x) = F_x\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} F_x(f_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Isto já tinha sido observado, sem recorrer à proposição 1.4.5, no exemplo 1.4.4.

1.4.2 Sucessões de Cauchy

Definição 1.4.4 Diz-se que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de um espaço métrico (E, d) é uma *sucessão de Cauchy* se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Exemplo 1.4.7 Seja p um primo natural. Se se considerar em $\mathbb{Q}$ a métrica p-ádica (definida no exemplo 1.1.4), então a sucessão $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. De facto,

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : d_p(p^m, p^n) = 2^{-\min\{m,n\}},$$

pelo que, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, se $p_1 \in \mathbb{N}$ for tal que $2^{-p_1} < \varepsilon$ então tem-se

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p_1 \Longrightarrow d_p(p^m, p^n) = 2^{-\min\{m,n\}} \leqslant 2^{-p_1} < \varepsilon.$$

Exemplo 1.4.8 Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\begin{array}{rccl} f_n\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} n - n^3x & \text{se } x < 1/n^2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

(veja-se a figura 1.9). Esta sucessão é uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{C}([0,1])$ relativamente à métrica do integral pois

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \int_0^1 |f_m - f_n| \leqslant \int_0^1 |f_m| + \int_0^1 |f_n| = \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}.$$

No entanto, a mesma sucessão não é de Cauchy relativamente à métrica do supremo, pois se m e n são números naturais distintos, então

$$d_\infty(f_m, f_n) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f_m(x) - f_n(x)\right| = |m - n| \geqslant 1.$$

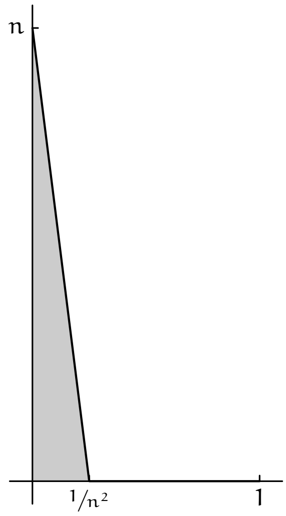

Figura 1.9: Gráfico de f_n ($n \in \mathbb{N}$). O valor de $\int_0^1 f_n$ é a área do triângulo a sombreado da figura, ou seja, é igual a $1/2n$.

Há uma observação importante que é necessário fazer relativamente a esta noção. Considere-se, por exemplo, a noção de «conjunto fechado». Trata-se de uma noção *relativa* no seguinte sentido: se E for um espaço métrico, se F for um sub-espaço métrico de E e se X for um sub-conjunto fechado de F, é possível que X não seja um sub-conjunto fechado de E; basta considerar, por exemplo, $E = \mathbb{R}^2$ (com a métrica usual), $F = \{ (x, 0) \in E \mid x \in \mathbb{R}_+^* \}$ e $X = \{ (x, 0) \mid E|x \in]0, 1] \}$. O mesmo se aplica às outras noções que foram definidas relativas a sub-conjuntos de espaços métricos (excepto no que se refere à noção de conjunto limitado), bem como relativamente à noção de sucessão convergente (veja-se na página 26 a observação que precede o enunciado da proposição 1.4.1). A noção de sucessão de Cauchy é, pelo contrário, uma noção *absoluta*: se X é um sub-espaço métrico de um espaço métrico E, então uma sucessão de elementos de X é uma sucessão de Cauchy no espaço métrico X se e só se for uma sucessão de Cauchy no espaço métrico E. Isto é assim pois para que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja de Cauchy só é necessário levar em conta as distâncias entre os pares de termos da sucessão e isto não muda se se passar para um espaço métrico maior (tal como se passa, aliás, no caso dos conjuntos limitados).

Proposição 1.4.6
Qualquer sucessão convergente é de Cauchy.

Demonstração: Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de elementos de um espaço métrico (E, d) que converge para $l \in E$ e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, se $m, n \in \mathbb{N}$ e se $m, n \geqslant p$ tem-se

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, l) + d(l, x_n) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Os exemplos de sucessões de Cauchy que foram vistos após a definição consistem em sucessões convergentes, pois em $(\mathbb{Q}, d_p)$ a sucessão $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 e em $\mathcal{C}([0, 1])$ a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função nula relativamente à métrica do integral. Naturalmente, não é difícil encontrar sucessões de Cauchy que não sejam convergentes. Basta tomar, por exemplo, $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ encarada como uma sucessão de elementos de $\mathbb{R}_+^*$ com a métrica usual.

Lema 1.4.1
Seja E um espaço métrico e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de E. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiver alguma sub-sucessão convergente, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Demonstração: Seja $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma sub-sucessão convergente da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e seja x o seu limite; vai-se prover que $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$.

Seja então $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : k \geqslant p \Longrightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e existe $p' \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p' \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, se $k \in \mathbb{N}$ for tal que $k \geqslant p$ e $n_k \geqslant p'$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant \max\{p', n_k\} \Longrightarrow d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Proposição 1.4.7
Se E_1 e E_2 são espaços métricos, $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é uma função uniformemente contínua e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de E_1, então $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sucessão de Cauchy.

Demonstração: Sejam d_1 e d_2 as métricas definidas em E_1 e E_2 respectivamente. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, seja $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x, y \in E_1) : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d_1(x_m, x_n) < \delta.$$

Então, se $m, n \in \mathbb{N}$ e se $m, n \geqslant p$ tem-se $d_2\big(f(x_m), f(x_n)\big) < \varepsilon$. ■

1.5 Espaços métricos completos

Definição 1.5.1 Diz-se que um espaço métrico E é *completo* se em E qualquer sucessão de Cauchy for convergente.

Exemplo 1.5.1 É visto nos cursos de Análise Real que $\mathbb{R}$ é completo (relativamente à métrica usual). A demonstração decorre de três factos:

1. qualquer sucessão de Cauchy é limitada;
2. qualquer sucessão limitada tem alguma sub-sucessão convergente;
3. qualquer sucessão de Cauchy que tenha alguma sub-sucessão convergente é convergente.

Destes três factos, o primeiro e o terceiro são válidos em qualquer espaço métrico. Aliás, o lema 1.4.1 afirma precisamente que, num espaço métrico, qualquer sucessão de Cauchy que tenha alguma sub-sucessão convergente é convergente. O segundo facto é o teorema de Bolzano-Weierstrass, que será demonstrado mais à frente.

Exemplo 1.5.2 Mais geralmente, se $n \in \mathbb{N}$ então $\mathbb{R}^n$ é completo relativamente à métrica usual. Para simplificar, será feita a demonstração unicamente no caso de $\mathbb{R}^3$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de $\mathbb{R}^3$. Cada x_n é da forma (a_n, b_n, c_n) com $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$. A sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, pois

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : |a_m - a_n| \leqslant \|x_m - x_n\|$$

e, pelo mesmo motivo, as sucessões $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também são de Cauchy. Sejam a, b e c os limites respectivos. Vê-se então facilmente que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para (a, b, c).

Resulta daqui que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}^n$ é completo, pois a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ (z_1, z_2, \ldots, z_n) & \rightsquigarrow & (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n) \end{array}$$

é uma isometria e, portanto, afirmar que $\mathbb{C}^n$ é completo equivale a afirmar que $\mathbb{R}^{2n}$ é completo.

Exemplo 1.5.3 Naturalmente, $\mathbb{Q}$ não é completo. Por exemplo, a sucessão $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de números racionais que é de Cauchy pois converge (em $\mathbb{R}$) para e; mas em $\mathbb{Q}$ a sucessão diverge. Um exemplo ainda mais simples consiste em tomar um número irracional α e definir $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ por $\alpha_n = [10^n\alpha]/10^n$. Se $\alpha = \sqrt{2}$, então

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 1{,}4,\ \alpha_2 = 1{,}41,\ \alpha_3 = 1{,}414,\ \alpha_4 = 1{,}4142,\ \ldots$$

Exemplo 1.5.4 Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F}_l(X)$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{C}$. Então $(\mathcal{F}_l(X), d_\infty)$, onde d_∞ é a métrica do supremo, é completo. De facto, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de Cauchy de elementos daquele espaço, ou seja, se se tiver

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon, \quad (1.15)$$

então, uma vez que, para cada $x \in X$ e cada $m, n \in \mathbb{N}$ se tem

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \sup|f_m - f_n| = d_\infty(f_m, f_n),$$

resulta de (1.15) que, para cada $x \in X$,

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon,$$

i. e. que a sucessão $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo, como $\mathbb{C}$ é completo, converge para algum número real, que vai ser representado por $f(x)$. Vai-se ver que $f \in \mathcal{F}_l(X)$ e que $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$.

Resulta de (1.15) que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d_\infty(f_m, f_n) < 1.$$

Logo, para cada $x \in X$,

$$\big|f(x) - f_p(x)\big| = \left|\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right) - f_p(x)\right| = \lim_{n\in\mathbb{N}}\big|f_n(x) - f_p(x)\big| \leqslant 1 \quad (1.16)$$

e então, visto que f_p é uma função limitada, f também o é.

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e seja $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$. Então, por (1.15), existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon'.$$

Mas então, se $x \in X$ e se $n \in \mathbb{N}$ for maior ou igual a p, tem-se, pelo mesmo argumento empregue na demonstração da desigualdade (1.16), que $\left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \varepsilon'$. Como isto acontece para cada $x \in X$, tem-se

$$d_\infty(f, f_n) = \sup |f - f_n| \leqslant \varepsilon' < \varepsilon.$$

Proposição 1.5.1
Sejam E_1 e E_2 espaços métricos e $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ uma bijecção tal que f e f^{-1} sejam uniformemente contínuas. Então E_1 é completo se e só se E_2 é completo.

Demonstração: Sejam d_1 e d_2 as métricas definidas em E_1 e E_2 respectivamente. Supondo que E_1 é completo vai-se mostrar que E_2 também o é. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de Cauchy de elementos de E_2 então, pela proposição 1.4.7, $\left(f^{-1}(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ também é de Cauchy, pelo que converge para algum $l \in E_1$. Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(l)$, pela proposição 1.4.5. ∎

O enunciado da proposição anterior não seria válido se se estivesse apenas a supor que f é um homeomorfismo. Por exemplo, relativamente à métrica usual a função $\arctan\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ é um homeomorfismo (e até é uniformemente contínua) mas $\mathbb{R}$ é completo enquanto que $]-\pi/2, \pi/2[$ não o é, pois a sucessão $(\pi/2 - 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy mas não é convergente.

Proposição 1.5.2
Se E for um espaço métrico completo e $X \subset E$, então o sub-espaço métrico X é completo se e só se X for um fechado de E.

Demonstração: Se X for um fechado de E e se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de Cauchy de elementos de X, então, uma vez que E é um espaço métrico completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum $l \in E$. Pelo corolário 1.4.1 sabe-se que, uma vez que X é fechado, $l \in X$.

Por outro lado, se X for um sub-conjunto não fechado de E então, novamente pelo corolário 1.4.1, existe alguma sucessão de elementos de X que converge para algum $l \in X^\complement$ e esta sucessão é necessariamente de Cauchy, uma vez que converge, mas em X esta sucessão é divergente, pela proposição 1.4.1. ∎

Exemplo 1.5.5 Resulta desta proposição que os sub-espaços completos de $\mathbb{R}^n$ são os fechados.

Exemplo 1.5.6 Seja $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ o sub-espaço métrico de $\mathcal{F}_l(\mathbb{N})$ formado pelas sucessões convergentes. Já foi visto no exemplo 1.5.4 que $\mathcal{F}_l(\mathbb{N})$ é completo. Por outro lado, $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ é um fechado de $\mathcal{F}_l(\mathbb{N})$, pois se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{N})^\complement$ então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é de Cauchy, ou seja, existe algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall p \in \mathbb{N})(\exists m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \wedge |x_m - x_n| \geqslant \varepsilon.$$

Então se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \varepsilon/3)$ tem-se

$$(\forall p \in \mathbb{N})(\exists m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \wedge |y_m - y_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ é completo.

Repare-se que se E é um espaço métrico e $X \subset E$ então a condição «X é um sub-espaço métrico completo de E» é absoluta e não relativa.

Proposição 1.5.3
Se E for um espaço métrico completo e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão decrescente de fechados não vazios de E tal que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(F_n) = 0,$$

então o conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tem um e um só elemento.

Demonstração: Seja d a métrica definida em E. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in F_n$. A sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Para o demonstrar, tome-se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(F_p) < \varepsilon$. Se $m, n \in \mathbb{N}$ e se $m, n \geqslant p$, então, visto que a sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, tem-se

$$x_m, x_n \in F_{\min\{m,n\}} \subset F_p$$

e então, uma vez que $\operatorname{diam}(F_p) < \varepsilon$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Sejam $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. A bola $B(x, \varepsilon)$ contém todos os x_n para n suficientemente grande; em particular contém algum elemento da forma x_n com $n \geqslant m$. Logo, $x_n \in F_m$, pois $F_m \supset F_n$. Está então provado que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*) : B(x, \varepsilon) \cap F_m \neq \emptyset$, ou seja, $x \in \overline{F_m}$, pelo que $x \in F_m$, pela proposição 1.3.1. Como isto tem lugar qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Finalmente, a intersecção de todos os F_n não pode ter nenhum elemento y distinto de x, pois se tivesse então

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}) : x, y \in F_n &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(F_n)\\ &\Longrightarrow d(x,y) \leqslant \lim_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(F_n) = 0,\end{aligned}$$

o que é absurdo. ■

Definição 1.5.2 Se (E_1, d_1) e (E_2, d_2) são espaços métricos, diz-se que uma função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é uma *contracção* se, para algum $k \in]0,1[$, se tiver

$$(\forall x, y \in E_1) : d_2\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k d_1(x,y). \tag{1.17}$$

Claramente, qualquer contracção é uma função contínua e mesmo uniformemente contínua.

Relembre-se que se X é um conjunto e $x \in X$, então diz-se que x é um ponto fixo de uma função $f\colon X \longrightarrow X$ se $f(x) = x$. Naturalmente, uma contracção não pode ter mais do que um ponto fixo.

Teorema 1.5.1 (Teorema do ponto fixo de Banach)
Se E é um espaço métrico completo não vazio e se $f\colon E \longrightarrow E$ é uma contracção, então f tem um e um só ponto fixo.

Demonstração: Conforme foi observado atrás, f não pode ter mais do que um ponto fixo. O problema reside então em mostrar que tem algum. Sejam então d a métrica definida em E e $k \in]0,1[$ para o qual seja válida a condição (1.17). Tome-se $x \in E$ e, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, seja

$$x_n = \overbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}^{n \text{ vezes}}(x).$$

Por outras palavras, $x_0 = x$ e

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : x_{n+1} = f(x_n). \tag{1.18}$$

Se se mostrar que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ converge então o teorema está demonstrado, pois se l for o limite da sucessão tem-se

$$\begin{aligned} f(l) &= f\left(\lim_{n\in\mathbb{Z}_+} x_n\right)\\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \text{ (pela proposição 1.4.5)}\\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1} \text{ (por 1.18)}\\ &= l\end{aligned}$$

pela proposição 1.4.3. Uma vez que E é completo, para mostrar que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ converge basta mostrar que se trata de uma sucessão de Cauchy.

Facilmente se vê que

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant k^n d(x_1, x_0)$$

pelo que, se $n \in \mathbb{Z}_+$ e $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant \left(\sum_{j=n}^{n+p-1} k^j\right) d(x_1, x_0) \\ &< \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Então, se $m, n \in \mathbb{Z}_+$ tem-se

$$d(x_m, x_n) < \frac{k^{\min\{m,n\}}}{1-k} d(x_1, x_0)$$

pelo que se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e se se tomar $p \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : n \geqslant p \Longrightarrow \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

(o que é possível pois $\lim_{n\in\mathbb{Z}_+} k^n = 0$) tem-se

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}_+) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$ ∎

Este teorema é muito empregue em Análise para demonstrar a existência de funções com determinadas propriedades. Por exemplo, pode ser empregue para demonstrar a existência (e unicidade) de soluções de equações diferenciais. Também é empregue para demonstrar o teorema da função inversa.

Considere-se agora num espaço métrico E duas partes densas A e B. Facilmente se vê que $A \cap B$ pode não ser denso. Pode até ser vazio como, por exemplo, no caso em que $E = \mathbb{R}$ (com a métrica usual), $A = \mathbb{Q}$ e $B = \mathbb{Q}^\complement$. No entanto, se A ou B for aberto então a intersecção é densa. De facto (supondo A aberto) se $x \in E$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ então, por definição, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Como $B(x, \varepsilon) \cap A$ é um aberto não vazio e B é denso,

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \cap B) = \big(B(x, \varepsilon) \cap A\big) \cap B \neq \emptyset,$$

pelo que $A \cap B$ é denso. Mais geralmente, pode-se mostrar por indução que se $n \in \mathbb{N}$ e se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem abertos densos (ou mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem conjuntos densos e $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ forem abertos), então $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ é denso.

E se se tiver uma família numerável de abertos densos? Neste caso, a intersecção poderá não ser densa. Por exemplo, em $\mathbb{Q}$ com a métrica usual sabe-se que, para cada $q \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \setminus \{q\}$ é um aberto denso, mas

$$\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{Q} \setminus \{q\} = \emptyset$$

que, obviamente, não é denso. Por outro lado, em $\mathbb{R}$ munido da métrica discreta o único sub-conjunto denso é $\mathbb{R}$, uma vez que qualquer sub-conjunto é fechado. Logo, uma família numerável de abertos densos só pode ser uma família em que cada elemento é $\mathbb{R}$, pelo que a intersecção é mais uma vez $\mathbb{R}$, que é denso.

Já não é tão simples de ver o que se passa quando se está a trabalhar com $\mathbb{R}$ munido da métrica usual. De facto, neste caso também é verdade que a intersecção de uma família numerável de abertos densos é densa. Mais geralmente, é válido o seguinte teorema:

Teorema 1.5.2 (Teorema de Baire)
Num espaço métrico completo, as famílias numeráveis de abertos densos têm intersecção densa.

Demonstração: Sejam E o espaço métrico em questão e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família numerável de abertos densos. Se $x \in E$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, quer-se mostrar que algum elemento de $B(x, \varepsilon)$ pertence a todos os A_n simultaneamente.

Sejam $x_1 = x$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Como A_1 é um aberto denso, $B(x_1, \varepsilon) \cap A_1$ é um aberto não vazio. Seja $x_2 \in B(x_1, \varepsilon) \cap A_1$ e seja $\varepsilon_2 \in]0, \varepsilon_1/2]$ tal que $B'(x_2, \varepsilon_2) \subset B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_1$. Uma vez que A_2 é um aberto denso, $B(x_2, \varepsilon_2) \cap A_2$ é um aberto não vazio. Seja $x_3 \in B(x_2, \varepsilon_2) \cap A_2$ e seja $\varepsilon_3 \in]0, \varepsilon_2/2]$ tal que $B'(x_3, \varepsilon_3) \subset B(x_2, \varepsilon_2) \cap A_2$. Continuando este processo, obtêm-se sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

1. $\varepsilon_n \in \left]0, \frac{\varepsilon}{2^n}\right]$;
2. $B'(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(x_n, \varepsilon_n) \cap A_n$.

Sabe-se, pela proposição 1.5.3, que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B'(x_n, \varepsilon_n) \neq \emptyset$. Mas

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B'(x_n, \varepsilon_n) &\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B(x_n, \varepsilon_n) \cap A_n)\\ &\subset B(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).\end{aligned}$$ ■

Observe-se que, se A for um sub-conjunto de um espaço métrico, então A é aberto se e só se $A^{\complement}$ for fechado e que A é denso se e só se $A^{\complement}$ tiver o interior vazio (pela relação (1.6)). Logo, o teorema de Barie também pode ser enunciado do seguinte modo: *num espaço métrico completo a reunião de uma família numerável de fechados com o interior vazio tem o interior vazio.*

Proposição 1.5.4
Sejam E_1 e E_2 espaços métricos, sendo E_2 completo. Se X for uma parte densa de E_1 e se $f\colon X \longrightarrow E_2$ for uma função uniformemente contínua, então f é prolongável a uma e uma só função contínua $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$, a qual também é uniformemente contínua.

Demonstração: Seja $x \in E_1$. Uma vez que X é denso sabe-se, pela proposição 1.4.4, que x é limite de alguma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X. Então a sucessão $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, pela proposição 1.4.7 e, portanto, converge, pois está-se a supor que E_2 é completo. Define-se então

$$F(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n).$$

Comece-se por ver que esta definição faz sentido, i. e. que se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também for uma sucessão de elementos de X que converge para x, então

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f(y_n).$$

Para tal, basta observar que se se definir a sucessão $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$z_n = \begin{cases} x_{n/2} & \text{se } n \text{ for par} \\ y_{(n+1)/2} & \text{se } n \text{ for ímpar,} \end{cases}$$

então, como $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, sabe-se que $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Logo, pela proposição 1.4.3, as sub-sucessões $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(f(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para o mesmo limite. Deduz-se da proposição 1.4.5 que, se F for contínua, então é a única função contínua que poderá ser um prolongamento de f.

Para terminar a demonstração, falta ver que F é uniformemente contínua. Sejam d_1 e d_2 as métricas definidas em E_1 e E_2 respectivamente. Fixe-se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x, y \in E_1) : d_1(x,y) < \delta \Longrightarrow d_2\big(F(x), F(y)\big) < \varepsilon.$$

Para tal, tome-se $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x, y \in X) : d_1(x,y) < \delta' \Longrightarrow d_2\big(f(x), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{3};$$

um tal δ' existe uma vez que f é uniformemente contínua. Seja $\delta = \delta'/2$ e sejam $x, y \in E_1$ tais que $d_1(x,y) < \delta$. Pela definição de F sabe--se que existe $x' \in X$ tal que $d_1(x,x') < \delta'/4$ e $d_2\big(F(x), f(x')\big) < \varepsilon/3$. Analogamente, existe $y' \in X$ tal que $d_1(y,y') < \delta'/4$ e $d_2\big(F(y), f(y')\big) < \varepsilon/3$. Então

$$\begin{aligned} d_1(x',y') &\leqslant d_1(x',x) + d_1(x,y) + d_1(y,y') \\ &< \frac{\delta'}{4} + \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta'}{4} \\ &= \delta'. \end{aligned}$$

Portanto $d_2\big(f(x'), f(y')\big) < \varepsilon/3$ e então

$$\begin{aligned} d_2\big(F(x), F(y)\big) &\leqslant d_2\big(F(x), F(x')\big) + d_2\big(F(x'), F(y')\big) + d_2\big(F(y'), F(y)\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Por exemplo, considere-se no espaço métrico $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ (para a definição, veja-se o exemplo 1.5.6), munido da métrica do supremo, o conjunto Q formado pelas sucessões quase-constantes, i. e. pelas sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos cuja restrição a algum conjunto da forma $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ é constante. Seja $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{C}$ a função assim definida: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Q$ e se $c \in \mathbb{C}$ for tal que $x_n = c$ para n suficientemente grande, então $f\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = c$. A função f é uniformemente contínua (basta tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de função contínua). Por outro lado, Q é denso em $\mathcal{C}(\mathbb{N})$. De facto, se

$$s = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)$$

for convergente então a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned}
s_1 &= (x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots)\\
s_2 &= (x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_2, \ldots)\\
s_3 &= (x_1, x_2, x_3, x_3, x_3, x_3, \ldots)\\
s_4 &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_4, \ldots)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

é uma sucessão de elementos de Q que converge para s. Uma vez que $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ é completo então, pela proposição anterior, f é prolongável a uma e uma só função contínua $F\colon \mathcal{C}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Verifica-se facilmente que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{N})$, então

$$F\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Teorema 1.5.3
Se E for um espaço métrico, existe um espaço métrico completo $\hat{E}$ e uma função $j\colon E \longrightarrow \hat{E}$ que preserva a métrica e tal que $j(E)$ é denso em $\hat{E}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das sucessões de Cauchy em E. Em $\mathcal{C}$ considera-se a pseudo-métrica D definida por

$$D\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \lim_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, y_n).$$

É preciso começar por verificar que esta definição faz sentido, i. e. que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sucessões de Cauchy, então o limite

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, y_n)$$

existe. A fim de mostrar que a sucessão $\big(d(x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vai-se mostrar que é de Cauchy. Tem-se

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$$

pelo que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

Analogamente, trocando m e n vem

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leqslant d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

Logo

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \left|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)\right| \leqslant d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Sabe-se, visto que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sucessões de Cauchy, que, para algum $p \in \mathbb{N}$, se tem

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \left|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)\right| < \varepsilon.$$

Agora é preciso mostrar que D é realmente uma pseudo-métrica. É claro que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, então $D((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0$ e que se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for também um elemento de $\mathcal{C}$, então $D\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = D\big((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Finalmente, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são três sucessões de Cauchy de E, então

$$\begin{aligned} D\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, z_n) \\ &\leqslant \lim_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, y_n) + \lim_{n\in\mathbb{N}} d(y_n, z_n) \\ &= D\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) + D\big((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big). \end{aligned}$$

Define-se o espaço métrico $(\hat{E}, D)$ como sendo o espaço métrico obtido a partir de $\mathcal{C}$ e de D empregando o processo mencionado na página 4. Considere-se a função $j\colon E \longrightarrow \hat{E}$ assim definida: se $x \in E$, então $j(x)$ é a (classe de equivalência da) sucessão constante que toma sempre o valor x. É claro que a função j preserva a distância. Vai-se agora mostrar que a sua imagem é densa em $\hat{E}$. Decorre da definição de conjunto denso e da proposição 1.4.4 que isto é o mesmo que afirmar que qualquer elemento de $\hat{E}$ é limite de uma sucessão de elementos de $j(E)$. Seja então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x(n) \in j(E)$ a sucessão constante que toma sempre o valor x_n; vai-se mostrar que $\big([x(n)]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ em $\hat{E}$. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Então se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $n \geqslant p$ tem-se

$$D\big(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], [x(n)]\big) = \lim_{m\in\mathbb{N}} d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon,$$

uma vez que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ quando $m \geqslant p$.

Para terminar a demonstração, falta mostrar que $\hat{E}$ é completo. Para tal, observe-se que qualquer sucessão de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $j(E)$ converge em $\hat{E}$. Por definição de j, cada x_n é a classe de equivalência de uma sucessão que toma sempre o mesmo valor e este valor, por abuso de notação, vai também ser representado por x_n. Então a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E é uma sucessão de Cauchy e, pelo que foi visto atrás, em $\hat{E}$ tem-se $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$. Se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de Cauchy de elementos de $\hat{E}$ seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $j(E)$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : D(y_n, z_n) < \frac{1}{n}; \tag{1.19}$$

uma tal sucessão existe uma vez que $j(E)$ é denso. A sucessão $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy pois se $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\begin{aligned} D(z_m, z_n) &\leqslant D(z_m, y_m) + D(y_m, y_n) + D(y_n, z_n) \\ &< \frac{1}{m} + D(y_m, y_n) + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

pelo que, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, se $p \in \mathbb{N}$ for tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow D(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

e que $1/p < \varepsilon/3$, então

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow D(z_m, z_n) < \varepsilon.$$

Então a sucessão $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum $l \in \hat{E}$ e decorre de (1.19) que a sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para l. ■

Este método de construir $\hat{E}$ poderá parecer complicado à primeira abordagem, mas veja-se que consiste unicamente em acrescentar a E aquilo que lhe falta para ser completo, i. e. os limites das sucessões de Cauchy.

Definição 1.5.3 Se E for um espaço métrico, um *completamento* de E é um par ordenado (F, j) onde F é um espaço métrico completo e $j\colon E \longrightarrow F$ é uma função que preserva a distância.

O teorema 1.5.3 afirma que cada espaço métrico tem um completamento. Vai agora ser visto que tal completamento é essencialmente único.

Proposição 1.5.5
Sejam (E_1, j_1) *e* (E_2, j_2) *completamentos de um espaço métrico* E. *Existe então uma e uma só isometria* $\Psi\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *tal que* $\Psi \circ j_1 = j_2$.

Demonstração: Considere-se a função

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & j_1(E) & \longrightarrow & E_2 \\ & x & \rightsquigarrow & j_2\big(j_1{}^{-1}(x)\big). \end{array}$$

Uma vez que j_1 e j_2 preservam a métrica, ψ também preserva a métrica; em particular, ψ é uniformemente contínua. Sabe-se então, pela proposição 1.5.4, que existe um e um só prolongamento contínuo de ψ a uma função $\Psi\colon E_1 \longrightarrow E_2$. Repare-se que Ψ é a única função contínua de E_1 em E_2 para a qual se poderá ter $\Psi \circ j_1 = j_2$. De facto, se $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ for uma função contínua tal que $f \circ j_1 = j_2$, ou seja, se

$$(\forall x \in E) : f\big(j_1(x)\big) = j_2(x),$$

então

$$(\forall x \in j_1(E)) : f(x) = j_2\big(j_1{}^{-1}(x)\big).$$

Logo, a unicidade de Ψ garante que $\Psi = f$.

Falta mostrar que Ψ é uma isometria. Comece-se por ver que preserva a distância, i. e. que se $x, y \in E_1$ então

$$d_2\big(\Psi(x), \Psi(y)\big) = d_1(x, y), \tag{1.20}$$

sendo d_1 e d_2 as métricas definidas em E_1 e em E_2 respectivamente. Como Ψ é um prolongamento de ψ e as funções j_1 e j_2 preservam a distância, é claro que (1.20) é válido se $x, y \in j_1(E)$. Se $x \in E$ (mas continuando a supor que $y \in j_1(E)$), sabe-se que x é limite de alguma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $j_1(E)$. Logo[8]

$$\begin{aligned} d_2(\Psi(x), \Psi(y)) &= d_2\left(\Psi\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n\right), \Psi(y)\right) \\ &= d_2\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \Psi(x_n), \Psi(y)\right) \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} d_2\big(\Psi\big(x_n\big), \Psi(y)\big) \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} d_1(x_n, y) \\ &= d_1(x, y). \end{aligned}$$

[8]No que se segue, vai ser empregue o seguinte facto: se (E, d) é um espaço métrico e se $y \in E$, então a função de E em $\mathbb{R}$ definida por $x \rightsquigarrow d(x, y)$ é contínua. De facto, é até uniformemente contínua, uma vez que $(\forall x_1, x_2 \in E) : \big|d(x_1, y) - d(x_2, y)\big| \leqslant d(x_1, x_2)$.

Finalmente, se $x, y \in E_1$ então tome-se uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $j_1(E)$ convergente para x. Os cálculos efectuados atrás permitem novamente concluir que $d_2\big(\Psi(x), \Psi(y)\big) = d_1(x, y)$.

Para terminar a demonstração, falta provar que Ψ é bijectiva. Para tal, seja $\Psi^\star\colon E_2 \longrightarrow E_1$ a única função que preserva a distância e tal que $\Psi^\star \circ j_2 = j_1$. Então $\Psi^\star \circ \Psi$ é uma função de E_1 em E_1 que preserva a distância e, obviamente, $\Psi^\star \circ \Psi \circ j_1 = j_1$. Ora, por um lado já se sabe que $\mathrm{id}\colon E_1 \longrightarrow E_1$ também tem essas propriedades e, por outro lado, já foi visto que existe uma a uma só função nessas condições, pelo que $\Psi^\star \circ \Psi = \mathrm{id}$. Pelo mesmo argumento, $\Psi \circ \Psi^\star = \mathrm{id}$, pelo que Ψ tem inversa, ou seja, é uma bijecção. ∎

Exemplo 1.5.7 Se se considerar em $\mathbb{Q}$ a métrica usual, então o seu completamento é $\mathbb{R}$. Aliás, este facto pode servir de ponto de partida para a construção dos números reais a partir dos números racionais.

Exemplo 1.5.8 Mais geralmente, o completamento de um sub-espaço métrico X de um espaço métrico completo é $\overline{X}$.[9]

O exemplo anterior, juntamente com os únicos exemplos que foram vistos de espaços métricos não completos ($\mathbb{Q}$ e $]-\pi/2, \pi/2[$, ambos com a métrica usual) podem transmitir a falsa impressão de que de facto qualquer espaço métrico está naturalmente «mergulhado» num espaço métrico completo de modo que, para se obter o seu completado, basta considerar a aderência. Para ver que não é assim, considere-se o espaço métrico obtido a partir do espaço $\mathcal{R}([0,1])$ (veja-se a definição no exemplo 1.1.6) e da pseudo-métrica do integral. Vai-se mostrar que este espaço, que também será representado por $\mathcal{R}([0,1])$, não é completo.

Considere-se a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{R}([0,1])$ assim definida: se $n \in \mathbb{N}$, então f_n é a função

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 1/n^2 \\ n & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

É fácil demonstrar que se trata de uma sucessão de Cauchy, pois tem-se

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : d(f_m, f_n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

[9] Para se ser correcto, devia-se dizer que o par $\big(\overline{X}, i\big)$, onde $i\colon X \hookrightarrow \overline{X}$ é a inclusão, é um completamento de X. Uma observação análoga aplica-se ao exemplo anterior.

No entanto, esta sucessão não converge em $\mathcal{R}([0,1])$. De facto, se convergisse para uma função f daquele espaço, então f seria limitada (pela definição de função integrável segundo Riemann). Seja M um majorante de $|f|$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ para o qual $n \geqslant M$, ter-se-ia

$$\begin{aligned} d(f, f_n) &= \int_0^1 |f - f_n| \\ &\geqslant \int_0^{1/M^2} |f - f_n| \\ &\geqslant \int_0^{1/n^2} n - M\,dx + \int_{1/n^2}^{1/M^2} \frac{1}{\sqrt{x}} - M\,dx \\ &= \frac{1}{M} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mas então $\lim_{n\in\mathbb{N}} d(f, f_n) \geqslant 1/M$, o que é absurdo.

A sucessão do exemplo anterior era formada por funções limitadas (necessariamente, pois está-se a trabalhar com funções integráveis segundo Riemann, que são limitadas por definição), mas sem que houvesse um conjunto limitado que contivesse as imagens de todas todas as funções f_n ($n \in \mathbb{N}$). Vejamos agora que mesmo a existência de um tal conjunto limitado não garante a existência de limite para uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{R}([0,1])$. Por outras palavras, vai-se provar que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, o sub-espaço $\mathcal{R}_a^b([0,1])$ de $\mathcal{R}([0,1])$ formado pelas funções cuja imagem está contida em $[a, b]$ não é limitado. Para simplificar, isto será feito somente para $a = 0$ e $b = 1$. A demonstração vai permitir introduzir um espaço métrico particularmente interessante.

Para cada $\alpha \in]0, 1/3]$, define-se o conjunto de Cantor C_α do seguinte modo:

1. Seja I_0 o intervalo $[0,1]$.
2. Subtrai-se a I_0 o intervalo aberto central de comprimento α; seja I_1 o conjunto restante. Por outras palavras,
$$I_1 = I_0 \setminus \left]\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right[= \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}, 1\right].$$
3. O conjunto I_1 é formado pela reunião disjunta de dois intervalos fechados de $[0,1]$. A cada um destes intervalos subtrai-se o intervalo aberto central de comprimento $\alpha/3$. Seja I_2 o conjunto restante.

4. Vai-se construindo assim sucessivamente uma família decrescente $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de sub-conjuntos de $[0,1]$. Cada I_n é uma reunião disjunta de 2^n intervalos fechados de $[0,1]$ e I_{n+1} obtém-se retirando a cada um destes intervalos o intervalo aberto central de comprimento ${}^{\alpha}\!/_{3^n}$.

5. Define-se C_α como sendo $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I_n$.

Há uma passagem nesta definição com a qual é preciso ter algum cuidado. Para que o ponto 4. faça sentido é necessário demonstrar que o comprimento de cada um dos 2^n intervalos fechados cuja reunião disjunta forma I_n é maior de que ${}^{\alpha}\!/_{3^n}$; caso contrário, não se pode falar no «intervalo aberto central de comprimento ${}^{\alpha}\!/_{3^n}$». Para justificar a passagem, repare-se que o conjunto I_1 é obtido retirando-se de $[0,1]$ um segmento de comprimento α; logo, I_1 é formado por dois segmentos de comprimento $(1-\alpha)/2$. Em seguida, obtém-se I_2 retirando de I_1 dois segmentos de comprimento ${}^{\alpha}\!/_{3}$, pelo que I_2 é formado por quatro segmentos de comprimento $\big((1-\alpha)/2-\alpha/3\big)/2 = \big(1-\alpha-2\alpha/3\big)/4$. Prosseguindo este tipo de cálculos, vê-se que cada I_n é reunião de 2^n intervalos disjuntos de comprimento

$$\frac{1-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^k}{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(1-3\alpha\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right)$$

e então o que se quer mostrar é que:

$$(\forall n\in\mathbb{Z}_+):\frac{1}{2^n}\left(1-3\alpha\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right) > \frac{\alpha}{3^n}.$$

Verifica-se facilmente que esta desigualdade equivale a:

$$(\forall n\in\mathbb{Z}_+):\frac{1-3\alpha}{2^n} > -\frac{2\alpha}{3^n}$$

e esta última afirmação é obviamente verdadeira.[10]

Usualmente, a expressão «conjunto de Cantor» refere-se ao conjunto $C_{1/3}$ mas para demonstrar que $\mathcal{R}^1_0([0,1])$ não é completo é preciso recorrer a algum C_α com $\alpha < {}^1\!/_3$. Para um tal conjunto de Cantor, considere-se a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ assim definida:

$$(\forall n\in\mathbb{Z}_+)(\forall x\in[0,1]):f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in I_n\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

[10] Também se deduz desta desigualdade que α não pode ser maior do que ${}^1\!/_3$.

É claro que $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{R}_0^1([0,1])$ e que

$$(\forall n\in\mathbb{Z}_+):\int_0^1 f_n = 1-3\alpha\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

Deduz-se então que

- a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sucessão de Cauchy, pois se $m,n\in\mathbb{Z}_+$ com $m\geqslant n$ tem-se

$$\int_0^1 |f_m-f_n| = \int_0^1 f_n - f_m = 3\alpha\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^m\right);$$

- se a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ convergir para $f\in\mathcal{R}_0^1([0,1])$, então

$$\int_0^1 f = \lim_{n\in\mathbb{Z}_+}\int_0^1 f_n = 1-3\alpha>0. \tag{1.21}$$

Para se mostrar que uma tal função f não pode existir é conveniente provar que o conjunto de Cantor tem interior vazio ou, o que é equivalente, que C_α não contém intervalos da forma $]a,b[$. De facto, se contivesse um tal intervalo então $(\forall n\in\mathbb{Z}_+):]a,b[\subset I_n$. Mas isto é impossível uma vez que I_n é um sub-conjunto de $[0,1]$ que é reunião de 2^n intervalos disjuntos com o mesmo comprimento e, se $n\in\mathbb{Z}_+$ for suficientemente grande, $b-a>{}^1\!/_{2^n}$.

Para terminar a demonstração de que $\mathcal{R}_0^1([0,1])$ não é completo, vai-se mostrar que, se P for uma partição de $[0,1]$, então $\underline{\Sigma}(f,P)$ (a soma inferior de f relativamente a P) não excede 0, o que contradiz (1.21). Para tal, basta mostrar que se $a,b\in[0,1]$ e $a<b$, então $\inf f([a,b])\leqslant 0$. Se assim não fosse, i. e. se existisse um intervalo não degenerado $[a,b]\subset[0,1]$ com $\inf f([a,b])>0$, então, uma vez que $]a,b[\not\subset C_\alpha$ (pois o interior de C_α é vazio) $]a,b[$ teria de conter algum $c\notin C_\alpha$. Pela definição de C_α, haveria algum intervalo $]a',b'[$ contendo c e contido em $[a,b]$ tal que $]a',b'[\cap I_n=\emptyset$ para cada n suficientemente grande, pelo que $f_n(]a',b'[)=\{0\}$ para n suficientemente grande. Para um tal n tem-se

$$\int_0^1|f-f_n|\geqslant\int_{a'}^{b'}|f-f_n|=\int_{a'}^{b'}|f|,$$

pelo que

$$\int_{a'}^{b'}|f|\leqslant\lim_{n\in\mathbb{Z}_+}\int_0^1|f-f_n|=0. \tag{1.22}$$

Mas se $\inf f([a,b]) = x > 0$ então $\inf |f|([a',b']) \geqslant x$, pelo que

$$\int_{a'}^{b'} |f| \geqslant x.(b-a) > 0,$$

o que contradiz (1.22).

O completamento de $\mathcal{R}([a,b])$ é usualmente designado pelo espaço das funções integráveis segundo Lebesgue e representa-se normalmente por $L^1([a,b])$. Este «integral» a que se está aqui a fazer referência é o (único) prolongamento a $L^1([a,b])$ da função uniformemente contínua

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \rightsquigarrow & \displaystyle\int_a^b f \end{array}$$

e designa-se por «integral de Lebesgue».

1.6 Exercícios

1) Verifique que a métrica discreta é efectivamente uma métrica.

2) Mostre que a função:

$$\begin{array}{cccc} d_\infty\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \rightsquigarrow & \max\big\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\big\} \end{array}$$

é uma distância.

3) Mostre que a função:

$$\begin{array}{cccc} d_1\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \rightsquigarrow & |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \end{array}$$

é uma distância.

4) Seja $\mathcal{C}([0,1])$ o espaço das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Considere a função:

$$\begin{array}{cccc} d_1\colon & \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \rightsquigarrow & \displaystyle\int_0^1 |f-g|. \end{array}$$

1. Mostre que d_1 é uma distância.

2. Caso se substitua o espaço $\mathcal{C}([0,1])$ pelo espaço das funções integráveis segundo Riemann de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, a função d_1 continua a ser uma distância?

5) Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. Neste exercício vai-se estudar a métrica p-ádica (ver o exemplo 1.1.4 na página 2). Para cada $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, seja $\nu_p(r)$ o único inteiro tal que r se pode escrever sob a forma:

$$r = p^{\nu_p(r)} \cdot \frac{a}{b}$$

sendo a e b dois números inteiros primos com p e seja

$$|r|_p = \begin{cases} p^{-\nu_p(r)} & \text{se } r \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} d_p\colon & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (r,s) & \rightsquigarrow & |r-s|_p \end{array}$$

1. Calcule $\nu_p(18/5)$ para os diversos valores de $p \in \{2,3,5,7\}$.
2. Calcule $d_p(2, 1/3)$ e $d_p(-8, 1/3)$ para os diversos valores de $p \in \{2,3,5\}$.
3. Mostre que $(\forall r, s \in \mathbb{Q}) : |r+s|_p \leqslant \max\{|r|_p, |s|_p\}$.
4. Mostre que a função d_p é uma distância tal que

$$(\forall r,s,t \in \mathbb{Q}) : d_p(r,t) \leqslant \max\{d_p(r,s), d_p(s,t)\}. \tag{1.23}$$

Nota: Uma métrica que satisfaz a propriedade (1.23) diz-se uma ultra-‑métrica .

6) Sejam (E,d) um espaço métrico e $n \in \mathbb{N}$. Dados $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in E$, mostre que se tem:

$$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_{k+1}).$$

7) Seja (E,d) um espaço métrico. Mostre que, dados $x,y,z \in E$, se tem:

$$\big|d(x,z) - d(y,z)\big| \leqslant d(x,y).$$

8) Seja (E, d) um espaço métrico. Considere as funções

$$\begin{array}{rccc} d_1\colon & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & \min\{d(x, y), 1\} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} d_2\colon & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}. \end{array}$$

Mostre que d_1 e d_2 são distâncias.

9) Seja E um conjunto e seja $d\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

1. $(\forall x, y \in E) : d(x, y) = 0 \iff x = y;$
2. $(\forall x, y \in E) : d(x, y) = d(y, x);$
3. $(\forall x, y, z \in E) : d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$

Mostre que d é uma distância.

10) Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) dois espaços métricos. Mostre que qualquer função constante de E_1 em E_2 é contínua.

11) Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) dois espaços métricos, sendo d_1 a métrica discreta. Mostre que qualquer função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é contínua.

12) Sejam d_1 a métrica usual em $\mathbb{R}$ e d_2 a métrica discreta em $\mathbb{R}$. Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, d_1) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, d_2) \\ x & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

é descontínua em todos os pontos do domínio.

13) Usando as notações do exercício 8, mostre que as funções

$$\begin{array}{ccc} (E, d_i) & \longrightarrow & (E, d) \\ x & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} (E, d) & \longrightarrow & (E, d_i) \\ x & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

são uniformemente contínuas ($i \in \{1, 2\}$).

14) Dados um espaço métrico (E, d) e um elemento $y \in E$, mostre que a função:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & d(x, y) \end{array}$$

é uniformemente contínua.

15) Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável com derivada limitada. Mostre que f é uniformemente contínua.

16) Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(1/x^2\right) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Mostre que a função f

1. é derivável com derivada não limitada;
2. é uniformemente contínua. Nota: Foi mencionado na página 20 que qualquer função contínua de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ é uniformemente contínua, mas o que se pretende aqui é demonstrar a continuidade uniforme de f sem se recorrer a esse facto. Comece por deduzir do execício anterior que a restrição de f a cada intervalo do tipo $[a,1]$ (com $0 < a < 1$) é uniformemente contínua.

17) Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) dois espaços métricos. Investigue se a função inversa de qualquer função uniformemente contínua $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é também uniformemente contínua.

18) Considere o espaço métrico $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$, sendo d_1 a métrica do integral.

1. A função:
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \rightsquigarrow & f(0) \end{array}$$
é contínua?
2. Se a métrica d_1 for substituída pela métrica do supremo d_∞, a resposta à pergunta da alínea anterior é a mesma?

19) Considere as distâncias usuais em $\mathbb{Q}$ e em $\{0,1\}$. Existe alguma função contínua e sobrejectiva $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \{0,1\}$?

20) Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ assim definida:

– se $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = 1/n$, onde n é o menor número natural tal que $nx \in \mathbb{Z}$;

– se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0$.

Mostre que os pontos de $\mathbb{R}$ onde f é contínua são os números irracionais.

21) Seja p um número primo. Considere em $\mathbb{Q}$ a distância usual, designada por d, e a distância p-ádica, designada por d_p.

1. Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Q}, d_p) & \longrightarrow & (\mathbb{Q}, d) \\ r & \rightsquigarrow & r \end{array}$$

é descontínua em todos os pontos do seu domínio.

2. Existe alguma função contínua de $(\mathbb{Q}, d_p)$ em $(\mathbb{Q}, d)$ que não seja constante?

22) Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \rightsquigarrow & \sqrt{x} \end{array}$$

é uniformemente contínua.

23) Sejam E um conjunto finito e d_1 e d_2 duas métricas definidas em E, sendo d_1 a métrica discreta. Mostre que (E, d_1) e (E, d_2) são homeomorfos.

24) Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual. Mostre que as funções $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = x + a$ ou $f(x) = -x + a$, em que $a \in \mathbb{R}$, são isometrias. Há outras isometrias?

25) Considere em $\mathbb{C}$ a métrica usual. Mostre que as funções $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ da forma $f(z) = \omega z + \beta$ ou $f(z) = \omega\bar{z} + \beta$, em que $\omega, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\omega| = 1$, são isometrias. Há outras isometrias?

26) Considere a função:

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & \begin{cases} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{array}$$

Seja d a distância usual em $\mathbb{R}^2$ e d_1 a distância em $\mathbb{R}^2$ definida no exercício 3.

1. Mostre que:

$$(\forall X \in \mathbb{R}^2) : d\big(f(X), f(0)\big) = d_1(X, 0).$$

2. Mostre que f é contínua em 0 para a métrica usual.
3. Mostre que $f\colon (\mathbb{R}^2, d_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ não é uma isometria.
4. Há alguma isometria de $(\mathbb{R}^2, d_1)$ em $(\mathbb{R}^2, d)$?

27) Seja (E, d) um espaço métrico. Mostre que:

1. Se $a \in E$ e $r \in]0, +\infty[$, se $S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$ então:

$$S(a, r) = B'(a, r) \cap (B(a, r))^{\complement}.$$

2. Se $a \in E$ e $r \in]0, +\infty[$, $S(a, r)$ é fechado.

28) Prove que em $\mathbb{R}$, munido da métrica usual, qualquer intervalo aberto é um aberto.

29) Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que, relativamente à métrica usual em $\mathbb{R}$, os intervalos $]-\infty, a]$ e $[a, +\infty[$ são fechados.

30) Investigue se $\mathbb{Q}^2$ é aberto ou fechado em $\mathbb{R}^2$ relativamente à métrica:

1. usual;
2. discreta;
3. d_∞ (definida no exercício 2);
4. d_1 (definida no exercício 3).

31) Seja $p \in \mathbb{N}$ um primo. Para cada um dos conjuntos que se seguem, verifique se é aberto ou fechado em $\mathbb{Q}$, relativamente à métrica usual e à métrica p-ádica:

1. $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$;
2. $\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3. $\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;
4. $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\cap \mathbb{Q}$.

32) Considere em $\mathcal{C}([0,1])$ as métricas do integral e do supremo. Para cada conjunto que se segue, verifique se é aberto ou fechado em $\mathcal{C}([0,1])$ relativamente a cada uma destas distâncias:

1. $\{\, f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = 0 \,\}$;
2. $\{\, f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : |f(t)| < 1 \,\}$;
3. $\left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \;\middle|\; \int_0^1 f = 0 \right\}$.

33) Há partes de $\mathbb{Q}$ simultaneamente abertas e fechadas relativamente à métrica usual (para além de $\emptyset$ e $\mathbb{Q}$, naturalmente)?

34) Sejam E um conjunto e $\mathrm{deff}[d]E \times E\mathbb{R}$ a métrica discreta. Mostre que qualquer parte de (E, d) é simultaneamente aberta e fechada.

35) Seja (E, d) um espaço métrico sendo d uma ultra-métrica (ver a nota de rodapé do exercício 5).

1. Sejam $a, b \in E$ e $r \in]0, +\infty[$ tais que $b \in B(a, r)$. Mostre que $B(b, r) = B(a, r)$.
2. Sejam $a, b \in E$ e $r, s \in]0, +\infty[$ tais que as bolas $B(a, r)$ e $B(b, s)$ se intersectem. Mostre que se $r \leqslant s$, então $B(a, r) \subset B(b, s)$ (e, em particular, que se $r = s$, então $B(a, r) = B(b, s)$).
3. Mostre que uma bola aberta é um fechado e que uma bola fechada é um aberto.

36) Seja E um espaço métrico. Mostre que qualquer parte finita de E é fechada directamente a partir das definições (ou seja, sem ser pelo método do exemplo 1.3.6).

37) Sejam (E, d) um espaço métrico e $A \subset E$. Mostre que se tem:

1. Dados $x, y \in E$, $\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \leqslant d(x, y)$.
2. A função
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & d(x, A) \end{array}$$
é uniformemente contínua.

38) Considere em $\mathbb{R}^2$ a métrica usual.

1. Calcule a distância de $(0,0)$ a cada um dos seguintes conjuntos:

   a) $\{(1,1)\}$;

   b) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \,\}$;

   c) $\mathbb{Q}^2$;

   d) $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0 \,\}$.

2. Calcule a distância do conjunto $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0$ e $xy \geqslant 1 \,\}$ ao conjunto $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0 \,\}$.

39) Sejam E um espaço métrico não vazio e $A \subset E$. Mostre que as condições seguintes são equivalentes:

1. A é limitado;

2. $(\exists a \in E)(\exists r > 0) : A \subset B(a,r)$;

3. $(\forall a \in E)(\exists r > 0) : A \subset B(a,r)$.

40) Sejam M um espaço métrico, $a \in M$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$. Mostre que $\operatorname{diam}\big(B(a,r)\big) \leqslant 2r$ e que $\operatorname{diam}\big(B'(a,r)\big) \leqslant 2r$. Dê um exemplo de um espaço métrico onde o diâmetro de uma bola aberta $B(a,r)$ possa ser menor do que o da bola fechada $B'(a,r)$.

41) Para cada conjunto mencionado nos exercícios 31 e 32, calcule a aderência e o interior.

42) Seja I um intervalo de $[0,1]$ com mais do que um ponto e seja $M(I)$ o sub-conjunto de $\mathcal{C}([0,1])$ formado pelas funções $f \in \mathcal{C}([0,1])$ que sejam monótonas em I, i. e. tais que

$$(\forall x, y \in I) : x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y) \quad (f \text{ é crescente})$$

ou que

$$(\forall x, y \in I) : x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y) \quad (f \text{ é decrescente}).$$

Mostre que, relativamente à métrica do supremo, $M(I)$ é um fechado de $\mathcal{C}([0,1])$ com interior vazio.

43) Para cada conjunto que se segue, calcule a aderência no espaço métrico $(\mathcal{C}([-1,1]), d_\infty)$, sendo d_∞ a métrica do supremo:

1. $\mathcal{C}^1([-1,1])$;

2. $\{\, f \in \mathbb{R}[x] \mid (\forall x \in [-1,1]) : f(x) = f(-x) \,\}$;

3. $\mathbb{Q}[x]$.

44) Sejam $p \in \mathbb{N}$ um primo e $\mathbb{Q}_p$ o sub-anel de $\mathbb{Q}$ formado pelos números racionais r que podem ser escritos como quociente de dois inteiros a e b sendo b primo com p.

1. Mostre que $\mathbb{Q}_p$ é denso em $\mathbb{Q}$ relativamente à métrica usual.
2. Mostre que, relativamente à métrica p-ádica, $\mathbb{Q}_p = B'(0,1)$. Deduza deste facto que $\mathbb{Q}_p$ não é denso em $\mathbb{Q}$ relativamente à métrica p-ádica.
3. Sendo d e d_p respectivamente a métrica usual e a métrica p-ádica em $\mathbb{Q}$, calcule as distâncias $d(1/p, \mathbb{Q}_p)$ e $d_p(1/p, \mathbb{Q}_p)$.

45) Dê um exemplo de um espaço métrico (E, d) e de uma bola aberta $B(a, r) \subset E$ tais que $\overline{B(a, r)} \neq B'(a, r)$.

46) Seja $p \in \mathbb{N}$ um primo natural.

1. Mostre que a sucessão $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $\mathbb{Q}$ relativamente à métrica p-ádica mas diverge relativamente à métrica usual.
2. Estude a convergência em $\mathbb{Q}$ da sucessão $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativamente a cada uma das métricas mencionadas no exercício anterior.

47) Considere em $\mathcal{C}([0,1])$ as métricas do supremo e do integral. Estude a convergência da sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{array}{rccc} f_n\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & x^n \end{array}$$

relativamente a cada uma delas.

48) Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) dois espaços métricos e f uma função de E_1 em E_2 tal que, para qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E_1 que seja convergente, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ também seja convergente. Mostre que f é contínua.

49) Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

1. Mostre que se f for contínua, então o seu gráfico (i. e. o conjunto $\{\,(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\,\}$) é um fechado de $\mathbb{R}^2$. Sugestão: use o corolário 1.4.1, i. e. mostre que qualquer sucessão convergente de pontos do gráfico tem por limite um ponto do gráfico.

2. Há casos em que f é descontínua e onde, mesmo assim, o seu gráfico é um fechado de $\mathbb{R}^2$?

50) Seja (E, d) um espaço ultra-métrico. Mostre que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E é uma sucessão de Cauchy se e só se

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon.$$

51) Seja p um primo natural e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de números racionais definida por $x_n = 2^{p^{n-1}}$. Considere em $\mathbb{Q}$ a métrica p-ádica. Mostre que:

1. Se $p = 2$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.
2. Se $p = 3$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para -1. Sugestão: comece por calcular $|x_n + 1|_3$ para pequenos valores de n.
3. A sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Sugestão: supondo que $p \neq 2$, mostre por indução que
$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 2^{p^{n-1}(p-1)} - 1 \text{ é múltiplo de } p^n;$$
use em seguida o exercício anterior.
4. Se $p \neq 2$, então a sucessão $\left(x_n^{p-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 1.
5. Se $p > 3$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Sugestão: use o facto de que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ definida por $x \mapsto x^n$ é contínua relativamente à métrica p-ádica.

52) Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) dois espaços métricos e $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ uma função. Diz-se que f preserva sucessões de Cauchy se para qualquer sucessão de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E_1, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sucessão de Cauchy.

1. Mostre que se f preserva sucessões de Cauchy então f é contínua.
2. Será que se f for contínua, f preserva sucessões de Cauchy?
3. E se f preserva sucessões de Cauchy, f é uniformemente contínua?

53) Mostre que, em qualquer espaço métrico, as sucessões de Cauchy são limitadas.

54) Seja V um espaço vectorial real ou complexo, seja $\|\cdot\|$ uma norma definida em V e considere em V a distância induzida pela norma (i. e. a função que envia (v, w) em $\|v-w\|$). Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de Cauchy de V. Mostre que a sucessão $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sucessão de Cauchy.

55) Mostre que qualquer espaço métrico discreto é completo.

56) Seja E um espaço métrico. Mostre que E é completo se e só se qualquer bola fechada de E for completa.

57) Sejam $(E_1, d_1), (E_2, d_2), \ldots, (E_n, d_n)$ espaços métricos não vazios. Considere em $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ a distância d definida por

$$d\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} d_k(x_k, y_k).$$

Mostre que $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ é completo se e só se cada E_k for completo.

58) Considere em $\mathcal{C}([0, 1])$ as métricas do supremo d_∞ e do integral d_1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \in \mathcal{C}([0, 1])$ a função definida pela expressão

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 1/2 - 1/2n \\ n(x - 1/2) + 1/2 & \text{se } |x - 1/2| < 1/2n \\ 1 & \text{se } x \geqslant 1/2 + 1/2n. \end{cases}$$

1. Mostre que, relativamente à métrica d_1, a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy.
2. Use a alínea anterior para provar que $(\mathcal{C}([0, 1]), d_1)$ não é um espaço métrico completo.
3. Mostre que $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ é um espaço métrico completo.

59) Se E_1 e E_2 forem espaços métricos, sendo E_1 completo, e f for uma função uniformemente contínua de E_1 em E_2, pode deduzir que $f(E_1)$ é completo?

60) Sejam (E, d) um espaço métrico completo e $f\colon E \longrightarrow E$ uma função contínua e sobrejectiva. Suponha que existe um número $K \in]1, +\infty[$ tal que, para cada $x, y \in E$, $d\big(f(x), f(y)\big) \geqslant Kd(x, y)$. Mostre que:

1. f é um homeomorfismo;

2. f possui um e um só ponto fixo.

61) Sejam (I, d_I) e (E, d_E) dois espaços métricos, sendo (E, d_E) completo. Considere em $I \times E$ a métrica

$$\begin{array}{rccc} d\colon & (I \times E) \times (I \times E) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((i,x),(j,y)\big) & \rightsquigarrow & \max\big\{d_I(i,j), d_E(x,y)\big\}. \end{array}$$

Sejam $F\colon I \times E \longrightarrow E$ uma função contínua e $K \in]0,1[$ tais que

$$(\forall i \in I)(\forall x, y \in E) : d_E\big(F(i,x), F(i,y)\big) \leqslant K d_E(x,y).$$

Mostre que:

1. Para cada $i \in I$, existe um e um só $\phi_i \in E$ tal que $F(i, \phi_i) = \phi_i$.

2. A função
$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \rightsquigarrow & \phi_i \end{array}$$
é contínua.

62) Considere em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$ as métricas usuais. Sejam A um aberto de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ e $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, limitada e tal que para algum $K \in]0, +\infty[$ se tem

$$(\forall (x, y_1), (x, y_2) \in A) : \big|f(x, y_1) - f(x, y_2)\big| \leqslant K|y_1 - y_2|.$$

Pretende-se demonstrar o teorema de Picard-Lindelöf: existe um número $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que a equação diferencial

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{array}\right. \tag{1.24}$$

tem uma e uma só solução no intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

1. Seja $\delta \in]0, +\infty[$ e seja $\mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ o espaço das funções contínuas de $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $\varphi \in \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ é solução da equação diferencial (1.24) se e só se

$$(\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) : \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)\,dt.$$

2. Seja M um majorante da imagem de $|f|$ e seja $\delta \in]0, +\infty[$ tal que $\delta < 1/\kappa$ e que o rectângulo
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leqslant \delta \text{ e } |y - y_0| \leqslant M\delta \right\}$$
esteja contido em A. Define-se Y como sendo o conjunto das funções $\varphi \in \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ tais que $\varphi(x_0) = y_0$ e que
$$(\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) : \left|\varphi(x) - y_0\right| \leqslant M\delta.$$
Considere em $\mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ a métrica do supremo d_∞. Mostre que Y é um fechado de $\mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$.
3. Mostre que Y é um espaço métrico completo.
4. Para cada $\varphi \in Y$, seja $T(\varphi) \in \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ a função:
$$\big(T(\varphi)\big)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)\,dt.$$
Mostre que T está bem definida.
5. Mostre que $T(Y) \subset Y$.
6. Mostre que T é uma contracção.
7. Deduza das alíneas anteriores que a equação diferencial (1.24) tem uma e uma só solução que tenha por domínio o intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

63) Este exercício tem como objectivo provar que se p for uma função polinomial de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, então o conjunto
$$A = \{\, p(z) \mid z \in \mathbb{C} \wedge p'(z) \neq 0 \,\}$$
é um aberto de $\mathbb{C}$.

1. Suponha que $p(0) = 0$ e que $p'(0) = 1$, ou seja, que existe algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e existem números $b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ tais que
$$(\forall w \in \mathbb{C}) : p(w) = w + \sum_{k=2}^{n} b_k w^k.$$
Se $c \in \mathbb{C}$, seja $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ a sucessão assim definida:

i. $w_0 = 0$;

ii. $(\forall m \in \mathbb{Z}_+) : w_{m+1} = c - \sum_{k=2}^{n} b_k {w_m}^k$.

Mostre que, se convergir para algum $w \in \mathbb{C}$, então $p(w) = c$.

2. Seja $\alpha \in]0,1[$ e seja $\rho \in]0,1[$ tal que

$$\rho < \frac{\alpha}{\sum_{k=2}^{m} k|b_k|}.$$

Mostre que $\sum_{k=2}^{n} |b_k|\rho^k < \rho$ e que se $c \in \mathbb{C}$ for tal que $|c| < \rho - \sum_{k=2}^{n} |b_k|\rho^k$, então

a) $(\forall k \in \mathbb{Z}_+) : |w_k| \leqslant \rho$;

b) $(\forall k \in \mathbb{N}) : |w_{k+1} - w_k| \leqslant \alpha|w_k - w_{k-1}|$;

c) a sucessão $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ converge.

Deduza que A é vizinhança de 0.

3. Deduza das alíneas anteriores que se $z \in \mathbb{C}$ for tal que $p'(z) \neq 0$, então A é vizinhança de $p(z)$ e empregue este facto para mostrar que A é um aberto de $\mathbb{C}$.

64) Sejam f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que, para cada $a \in \mathbb{R}$, exista algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(]a-\delta, a+\delta[)$ seja limitado. Para cada $a \in \mathbb{R}$, define-se a *oscilação* de f no ponto a por:

$$\operatorname{osc}_f(a) = \inf_{\delta > 0} \operatorname{diam}\bigl(f\bigl(]a-\delta, a+\delta[\bigr)\bigr).$$

1. Determine a oscilação de f em cada $a \in \mathbb{R}$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor (=$ maior inteiro menor ou igual a $x)$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$, mostre que são equivalentes:

a) a função f é contínua em a;

b) $\operatorname{osc}_f(a) = 0$.

3. Seja $m \in \mathbb{R}$. Mostre que $\{\, a \in \mathbb{R} \mid \operatorname{osc}_f(a) < m \,\}$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

4. Mostre que o conjunto dos pontos de continuidade de f não pode ser igual a $\mathbb{Q}$. Sugestão: use o teorema de Baire. Compare esta conclusão com o exercício 20.

65) Considere uma sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinómios não nulos de $\mathbb{R}[x,y]$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $V_n = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_n(x,y) = 0\,\}$.

1. Mostre que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \mathring{V}_n = \emptyset$.
2. Conclua que existe algum ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) : p_n(x,y) \neq 0$.

66) Seja $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de intervalos de $[0,1]$ com mais do que um ponto.

1. Mostre que existe alguma função $f \in \mathcal{C}([0,1])$ cuja restrição a qualquer intervalo I_n ($n \in \mathbb{N}$) não é monótona. Sugestão: empregue o exercício 42.
2. Suponha que a sucessão $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que qualquer intervalo de $[0,1]$ com mais do que um ponto contém algum elemento da sucessão; por exemplo, a sucessão poderá ser formada pelo intervalos

   $$[0,1],\ [0,1/2],\ [1/2,1],\ [0,1/3],\ [1/3,2/3],\ [2/3,1],\ [0,1/4],\ \ldots$$

   Deduza da alínea anterior que existe alguma função contínua de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que não é monótona em nenhum intervalo do seu domínio com mais do que um ponto.

67) Considere uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{C}([0,1])$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (f_{n+1})' = f_n.$$

Mostre que se $(\forall x \in [0,1])(\exists n \in \mathbb{N}) : f_n(x) = 0$, então f_1 é a função nula.

68) Dado $a \in]1,+\infty[$, considere a função

$$\begin{aligned} f_a\colon\ \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow a^x, \end{aligned}$$

a qual é crescente e verifica a condição

$$(\forall x,y \in \mathbb{Q}) : f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y).$$

1. Tendo em conta que $\lim_{n\in\mathbb{N}} a^{\frac{1}{n}} = 1$, mostre que para qualquer $b \in \mathbb{R}$, $f_a\big|_{]-\infty,b]\cap\mathbb{Q}}$ é uma função uniformemente contínua.

2. Mostre que f_a admite um único prolongamento contínuo F_a de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

3. Verifique que F_a é crescente e que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) : F_a(x+y) = F_a(x)F_a(y).$$

69) Seja $(G, +)$ um grupo abeliano. Designa-se por «grupo das séries formais com coeficientes em G» e representa-se por $G[[X]]$ o grupo cujos elementos são expressões da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$$

com $a_n \in G$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, sendo a soma definida por:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) X^n.$$

Representa-se por $G[X]$ o sub-grupo de $G[[X]]$ formado pelos polinómios com coeficientes em G. Considere a função d de $G[[X]] \times G[[X]]$ em $\mathbb{R}$ assim definida: se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n \in G[[X]]$, então

$$d\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n\right) = 0$$

e se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n X^n$ forem dois elementos distintos de $G[[X]]$, então

$$d\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n\right) = 2^{-\min\{n\in\mathbb{N}: a_n \neq b_n\}}.$$

1. Mostre que d define uma ultra-métrica em $G[[X]]$.

2. Seja $a \in G \setminus \{0\}$. Mostre que a sucessão $(\sum_{k=1}^{n} aX^k)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de $G[X]$ que converge em $G[[X]]$ mas não em $G[X]$.

3. Mostre que $G[X]$ é denso em $G[[X]]$.

4. Mostre que $G[[X]]$ é um espaço métrico completo.

5. Deduza das alíneas anteriores que $G[[X]]$ é o completado de $G[X]$.

70) Neste exercício vai ser vista outra maneira de descrever o conjunto de Cantor.

1. Seja $x \in [0,1]$. Mostre que existe alguma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\{0,1,2\}$ tal que
$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leqslant \frac{1}{3^k}.$$

2. Sejam x e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como na alínea anterior. Mostre que
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}. \tag{1.25}$$

3. Mostre que o conjunto de Cantor é formado pelos $x \in [0,1]$ que podem ser escritos sob a forma (1.25), com cada $a_k \in \{0,2\}$ $(k \in \mathbb{N})$ e que cada elemento do conjunto de Cantor só pode escrito sob aquela forma de uma só maneira.

Capítulo 2

Espaços topológicos

2.1 Definições e motivação

Definição 2.1.1 Se E é um conjunto, uma *topologia* em E é um conjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ tal que

1. $\emptyset, E \in \mathcal{T}$;
2. se $(A_j)_{j \in J}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$, então $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$;
3. se $(A_j)_{j \in J}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$ e se J for finito, então $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$.

Um *espaço topológico* é um par ordenado $(E, \mathcal{T})$, sendo E um conjunto e $\mathcal{T}$ uma topologia em E.

Sabe-se, pelo teorema 1.3.1, que o conjunto dos abertos de um espaço métrico E é uma topologia em E. No entanto, há topologias que não são provenientes de uma métrica. Considere-se, por exemplo, o conjunto $E = \{0, 1\}$. Se $d\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ for uma métrica, então a topologia $\mathcal{T}$ dos abertos de (E, d) é $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\big\}$. De facto, $\emptyset$ e E são abertos pois, em qualquer espaço métrico, $\emptyset$ e o espaço todo são abertos e, além disso,

– o conjunto $\{0\}$ é igual à bola $B\big(0, d(0, 1)\big)$;

– o conjunto $\{1\}$ é igual à bola $B\big(1, d(1, 0)\big)$.

Por outro lado, verifica-se facilmente que os conjuntos

$$\mathcal{T}_1 = \big\{\emptyset, \{0\}, E\big\},$$
$$\mathcal{T}_2 = \big\{\emptyset, \{1\}, E\big\}$$

e

$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, E\}$$

são topologias em E distintas de $\mathcal{T}$.

Repare-se que se E for um conjunto e $d\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ for uma pseudo-métrica, é possível definir em E as noções de bola aberta e de conjunto aberto da mesma maneira que nas definições 1.3.1 e 1.3.2. No entanto, se se considerar novamente o conjunto $E = \{0, 1\}$, a única pseudo-métrica que pode ser aí definida que não seja uma métrica é a pseudo-métrica grosseira, i. e. a função nula. Mas então o conjunto dos abertos de E seria $\mathcal{T}_3$, de onde se deduz que $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ não são sequer provenientes de uma pseudo-métrica.

Definição 2.1.2 Diz-se que um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ é *metrizável* se existir alguma métrica $d\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mathcal{T} = \{$abertos de $(E, d)\}$.

Já foi então visto que há espaços topológicos não metrizáveis. Por outro lado, não se deve cometer o erro de pensar que métricas distintas dão origem a topologias distintas. Por exemplo, considerem-se em $\mathbb{Z}$ a métrica usual e a métrica discreta. Conforme já foi mencionado (veja-se o exemplo 1.3.1 na página 11), relativamente à métrica discreta qualquer conjunto é aberto. Mas o mesmo ocorre em $\mathbb{Z}$ relativamente à métrica usual, pois se $A \subset \mathbb{Z}$ tem-se

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} = \bigcup_{x \in A} B(x, 1);$$

logo, A é aberto, pelo teorema 1.3.1.

Definição 2.1.3 Se E é um conjunto, diz-se que duas métricas d_1 e d_2 definidas em E são *equivalentes* se os abertos de (E, d_1) e de (E, d_2) forem os mesmos.

A observação que precede esta definição mostra que em $\mathbb{Z}$ a métrica usual e a discreta são equivalentes.

Há diversas razões que levam a ser desejável a reformulação de algumas noções estudadas no capítulo 1 no âmbito dos espaços topológicos. A título de exemplo do que se entende por «reformulação» considere-se a seguinte definição.

Definição 2.1.4 Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico e seja $X \subset E$. Diz-se que X é *aberto* se $X \in \mathcal{T}$; diz-se que X é *fechado* se $X^{\complement} \in \mathcal{T}$.

Resulta imediatamente das definições que o teorema 1.3.1 permanece válido se no seu enunciado se substituir «espaço métrico» por «espaço topológico».

Tal como no caso dos espaços métricos, se não houver risco de ambiguidade far-se-á referência apenas ao «espaço topológico E» e não ao «espaço topológico $(E, \mathcal{T})$», como já foi feito na definição precedente.

Há diversos motivos pelos quais é muitas vezes conveniente trabalhar com espaços topológicos no lugar de espaços métricos. Um destes motivos reside no facto de que, mesmo que um espaço topológico seja metrizável, é muitas vezes mais natural trabalhar-se directamente com a topologia e não com uma métrica.

Exemplo 2.1.1 Em Análise Real, ao estudarem-se limites de sucessões é necessário definir separadamente os conceitos de «sucessão convergente» e de «sucessão cujo limite é $\pm\infty$». No entanto, considere-se na recta acabada $\widehat{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a topologia $\mathcal{T}$ assim definida: $A \in \mathcal{T}$ se e só se A satisfaz as seguintes condições:

1. $A \cap \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$;
2. se $+\infty \in A$, então A contém algum intervalo da forma $]a, +\infty[$;
3. se $-\infty \in A$, então A contém algum intervalo da forma $]-\infty, a[$.

Repare-se que se $A \subset \mathbb{R}$, então A é um aberto de $(\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{T})$ se e só se for um aberto de $\mathbb{R}$ relativamente à topologia usual (i. e. a topologia proveniente da métrica usual). Como será visto, as sucessões de números reais convergentes relativamente a esta topologia são as que são convergentes para algum número real relativamente à topologia usual juntamente com aquelas que têm por limite $\pm\infty$. O espaço topológico $(\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{T})$ é metrizável; basta considerar, por exemplo, a bijecção

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \widehat{\mathbb{R}} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} x/(1+|x|) & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & \text{se } x = \pm\infty \end{cases} \end{array}$$

e definir uma métrica d em $\widehat{\mathbb{R}}$ por

$$\begin{array}{rccc} d\colon & \widehat{\mathbb{R}} \times \widehat{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & \big|f(x) - f(y)\big|. \end{array} \tag{2.1}$$

Pode-se aqui querer saber qual a origem da expressão $x/(1+|x|)$ no exemplo anterior. A resposta é a seguinte: qualquer expressão que desse origem a uma bijecção contínua de $\mathbb{R}$ num intervalo $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ cujo limite em $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) fosse b (resp. a) teria servido. Poderia ter-se empregue, por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \arctan(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}. \end{array}$$

Mas é precisamente o facto de haver muitas escolhas possíveis, nenhuma das quais é melhor do que as outras, que torna mais natural trabalhar com a topologia $\mathcal{T}$ do que com a métrica d.

Exemplo 2.1.2 Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F}(X)$ o conjunto das funções de X em $\mathbb{C}$. Já se viu uma maneira natural de se definir uma métrica no sub-espaço $\mathcal{F}_l(X)$ formado pelas funções limitadas: a métrica do supremo, definida por $d_\infty(f,g) = \sup|f-g|$. Naturalmente, esta definição não é válida em $\mathcal{F}(X)$, pois poder-se-ia ter $d_\infty(f,g) = +\infty$ em certos casos. Este problema poderia ser contornado generalizando o conceito de distância de modo a incluir distâncias infinitas. Alternativamente, poder-se-ia definir $d(f,g) = \min\{\sup|f-g|, 1\}$. Então d e d_∞ são métricas equivalentes em $\mathcal{F}_l(X)$ a d é uma métrica em $\mathcal{F}(X)$. Mas é mais natural observar que a topologia $\mathcal{T}$ induzida em $\mathcal{F}_l$ pela métrica d_∞ é tal que $A \in \mathcal{T}$ se e só se

$$(\forall f \in A)(\exists r \in \mathbb{R}_+^*)(\forall g \in \mathcal{F}_l(X)) : \sup|g-f| < r \Longrightarrow g \in A$$

e definir então uma topologia $\mathcal{T}$ em $\mathcal{F}(X)$ do seguinte modo: $A \in \mathcal{T}$ se e só se

$$(\forall f \in A)(\exists r \in \mathbb{R}_+^*)(\forall g \in \mathcal{F}(X)) : \sup|g-f| < r \Longrightarrow g \in A.$$

Esta topologia designa-se por «topologia da convergência uniforme».

Por outro lado, há muitos exemplos de topologias interessantes não metrizáveis.

Exemplo 2.1.3 Se $X \subset \mathbb{R}$, diz-se que uma função $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é semi--contínua superiormente num ponto $a \in X$ se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in X) : |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Se $x \in \mathbb{R}$, seja $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro que menoir ou igual a x. A função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \lfloor x \rfloor, \end{array}$$

embora descontínua, é semi-contínua superiormente. Se se definir em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\,]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R}\,\}$, então, como será visto (exemplo 2.2.15), as funções semi-contínuas superiormente são aquelas que são contínuas se se considerar em $X(\subset \mathbb{R})$ a topologia usual e em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$.

Exemplo 2.1.4 Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, seja $P_{a,b} = \{\, a + bn \mid n \in \mathbb{Z}\,\}$. Seja

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \big\{\text{reuniões de conjuntos da forma } P_{a,b} \ (a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N})\big\}.$$

Então $\mathcal{T}$ é uma topologia. Isto resulta do facto de a intersecção de dois conjuntos da forma $P_{a,b}$ ser ou vazia ou outro conjunto do mesmo tipo.[1]

Acontece que cada conjunto $P_{a,b}$ ($a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$) também é um fechado de $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$, pois se $b = 1$, então $P_{a,b} = \mathbb{Z}$ e, caso contrário,

$$P_{a,b} = \bigcup_{k=1}^{b-1} P_{a+k,b}.$$

Isto permite provar que há uma infinidade de números primos. Com efeito, se o conjunto P dos números primos fosse finito, então o conjunto $\bigcup_{p \in P} P_{0,p}$ seria fechado. Mas $\bigcup_{p \in P} P_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$. Logo, $\{1, -1\}$ seria um aberto de $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$. Isto é impossível, pois, com excepção do conjunto vazio, qualquer aberto de $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ é infinito.

2.2 Generalidades

2.2.1 Topologias

Repare-se que em qualquer conjunto E é possível definir as seguintes topologias:

topologia discreta: trata-se da topologia $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$; por outras palavras, é a topologia para a qual qualquer parte de E é um aberto. Naturalmente, o espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ é metrizável; basta considerar em E a métrica discreta. Um espaço topológico diz-se *discreto* se a sua topologia for a topologia discreta.

[1] Mais precisamente: se $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{N}$, então $P_{a,b} \cap P_{c,d}$ é da forma $P_{e,f}$ para algum $e \in \mathbb{Z}$ e algum $f \in \mathbb{N}$ caso $b - d$ seja múltiplo do máximo divisor comum de a e de c e é vazio caso contrário.

topologia grosseira: trata-se da topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$; por outras palavras, trata-se da topologia para a qual os únicos abertos de E são E e o conjunto vazio. Se E tiver mais do que um ponto, o espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ não é metrizável, mas a topologia grosseira é a que se obtém se se considerar em E a pseudo-métrica grosseira. Sempre que se falar em topologia grosseira estará implícito que E tem pelo menos dois pontos. Um espaço topológico diz-se *grosseiro* se a sua topologia for a topologia grosseira.

Definição 2.2.1 Se $(E, \mathcal{T}_1)$ e $(E, \mathcal{T}_2)$ forem espaços topológicos, diz-se que a topologia $\mathcal{T}_1$ é *mais fina* (respectivamente menos fina) do que a topologia $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$ (resp. $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$).

É claro que a topologia grosseira (respectivamente discreta) é a menos (resp. mais) fina que pode ser definida num conjunto.

Definição 2.2.2 Se $\mathcal{T}$ for uma topologia e $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, diz-se então que $\mathcal{B}$ é uma *base* da topologia $\mathcal{T}$ se qualquer elemento de $\mathcal{T}$ pode ser escrito como reunião de elementos de $\mathcal{B}$.

Exemplo 2.2.1 Em $\mathbb{R}$, uma base da topologia usual é o conjunto dos intervalos abertos do tipo $]a, b[$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), uma vez que qualquer aberto pode ser escrito como reunião de intervalos abertos deste tipo. Mais geralmente, num espaço métrico qualquer o conjunto das bolas abertas é uma base da topologia.

Exemplo 2.2.2 A topologia usual em $\mathbb{R}$ também admite como base o conjunto dos intervalos abertos da forma $]r_1, r_2[$ com $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 2.2.3 Num conjunto E, $\{\{x\} \mid x \in E\}$ é uma base da topologia discreta.

Quer-se agora definir a noção de sub-espaço topológico de um espaço topológico. Para tal, veja-se que se (X, d) for um espaço métrico e Y for um sub-espaço métrico de X então

1. se A for um aberto de X, $A \cap Y$ é um aberto de Y, como se pode deduzir das definições ou observando que $A \cap Y = j^{-1}(Y)$, sendo $j\colon Y \longrightarrow X$ a inclusão de Y em X;

2. se A um for aberto de Y, então existe, para cada $a \in A$, algum $\varepsilon_a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que a bola (em Y) de centro a e raio ε_a está contida em Y, pelo que em X se tem

$$A = Y \cap \left(\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a) \right);$$

em particular A é a intersecção de Y com um aberto de X.

Logo, se $\mathcal{T}$ for a topologia de X, a topologia de Y é $\{ A \cap Y \mid A \in \mathcal{T} \}$. Isto sugere que se adopte a seguinte definição:

Definição 2.2.3 Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, um seu *sub-espaço topológico* é um espaço topológico $(Y, \mathcal{T}')$ tal que $Y \subset X$ e que

$$\mathcal{T}' = \{ A \cap Y \mid A \in \mathcal{T} \}.$$

Mostra-se facilmente que esta definição faz sentido, i. e. que nas condições da definição $\mathcal{T}'$ é efectivamente uma topologia.

Sendo assim, se X é um espaço topológico e se Y é um sub-espaço topológico de X, um conjunto $A \subset Y$ é um aberto de Y se e só se for da forma $A' \cap Y$, para algum aberto A' de X. Como seria de esperar, o mesmo acontece com os fechados.

Proposição 2.2.1
Se X é um espaço topológico e se Y é um sub-espaço topológico de X, um conjunto $F \subset Y$ é um fechado de Y se e só se for da forma $F' \cap Y$, para algum fechado F' de X.

Demonstração: Se $F \subset Y$, seja $A = Y \setminus F$. Então

$$\begin{aligned} F \text{ é um fechado de } Y &\iff A \text{ é um aberto de } Y \\ &\iff A = A' \cap Y \text{ para algum aberto } A' \text{ de } X \\ &\iff F = (X \setminus A') \cap Y \text{ para algum aberto } A' \text{ de } X \\ &\iff F = F' \cap Y \text{ para algum fechado } F' \text{ de } X. \end{aligned}$$ ■

Exemplo 2.2.4 Considere-se na recta acabada $\hat{\mathbb{R}}$ a topologia definida no exemplo 2.1.1. Então, uma vez que $\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ pode ser visto como um sub-espaço topológico de $\hat{\mathbb{R}}$. Seja $\mathcal{T}$ a topologia usual em $\mathbb{R}$ e seja $\mathcal{T}'$ a topologia de $\mathbb{R}$ enquanto sub-espaço de $\hat{\mathbb{R}}$. Que relação há entre $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$? Acontece que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ pois:

– se $A \in \mathcal{T}$ então, pela definição da topologia de $\hat{\mathbb{R}}$, A é um aberto de $\hat{\mathbb{R}}$, pelo que $A(= A \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{T}'$;

– se $A \in \mathcal{T}'$, então $A = A^* \cap \mathbb{R}$ para algum aberto A^* de $\hat{\mathbb{R}}$, o que implica, pela maneira como foi definida a topologia de $\hat{\mathbb{R}}$, que $A(= A^* \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{T}$.

2.2.2 Vizinhanças

A definição de vizinhança que foi feita na página 13 não necessita de qualquer alteração no contexto dos espaços topológicos.

Definição 2.2.4 Um espaço topológico diz-se *separado* se, para cada dois pontos distintos x_1 e x_2, existirem vizinhanças V_1 e V_2 de x_1 e x_2 respectivamente que não se intersectam.

Exemplo 2.2.5 Um espaço topológico metrizável E é separado, pois se a topologia de E for proveniente de uma métrica d e $x_1, x_2 \in E$, então $B\big(x_1, d(x_1,x_2)/2\big)$ e $B\big(x_2, d(x_1,x_2)/2\big)$ são vizinhanças de x_1 e x_2 respectivamente que não se intersectam.

Exemplo 2.2.6 Um espaço topológico grosseiro não é separado.

Exemplo 2.2.7 O espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é a topologia definida no exemplo 2.1.3, não é separado, pois se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então qualquer aberto que contém b também contém a.

Proposição 2.2.2
Se E é um espaço topológico e $A \subset E$, então A é um aberto se e só se for vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração: Se A for aberto e $x \in A$ então, pela definição de vizinhança, A é vizinhança de x. Reciprocamente, se A for uma parte de E que é vizinhança de todos os seus pontos, então, para cada $x \in A$, existe algum aberto A_x tal que $x \in A_x$ e $A_x \subset A$. Logo,

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset A,$$

pelo que $A = \bigcup_{x \in A} A_x$; em particular, A é aberto. ∎

Definição 2.2.5 Sejam E um espaço topológico, $x \in E$ e $\mathcal{V}$ um conjunto de vizinhanças de x. Diz-se que $\mathcal{V}$ é um *sistema fundamental de vizinhanças* de x se qualquer vizinhança de x contiver algum elemento de $\mathcal{V}$.

Exemplo 2.2.8 Num espaço métrico E, se $x \in E$ então o conjunto

$$\left\{ B(x,r) \;\middle|\; r \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de x. Aliás, se V for uma vizinhança de x, então V contém alguma bola da forma $B(x, 1/n)$ ($n \in \mathbb{N}$), pelo que $\{ B(0, 1/n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ também é um sistema fundamental de vizinhanças de x. Repare-se que este conjunto é numerável.

Definição 2.2.6 Diz-se que um espaço topológico é 1-*numerável* se cada ponto de E tiver um sistema fundamental de vizinhanças numerável.

A observação feita antes desta definição demonstra o seguinte resultado:

Proposição 2.2.3
Qualquer espaço topológico metrizável é 1*-numerável.*

Exemplo 2.2.9 Um exemplo de espaço topológico não 1-numerável é dado por $\mathbb{R}$ munido da topologia $\mathcal{T}_{fin}$ formada pelo conjunto vazio e pelas partes A de $\mathbb{R}$ tais que $A^\complement$ é finito, que se designa por «topologia dos complementares finitos». De facto, se $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de vizinhanças de um ponto x então cada V_n contém um aberto A_n tal que $x \in A_n$, pelo que ${A_n}^\complement$ é finito e, por maioria de razão, ${V_n}^\complement$ também é finito. Logo

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n\right)^\complement \left(= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {V_n}^\complement\right)$$

é numerável; em particular é distinto de $\mathbb{R} \setminus \{x\}$. Então existe algum número real a distinto de x que pertence à intersecção de todos os V_n, pelo que $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ é uma vizinhança de x em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{fin})$ que não contém nenhum V_n.

Definição 2.2.7 Seja E um espaço topológico. Se $x \in E$, diz-se que x é um *ponto isolado* de E se $\{x\}$ for vizinhança de x. Diz-se que E é um espaço topológico *perfeito* se não tiver pontos isolados.

Exemplo 2.2.10 Qualquer espaço topológico grosseiro E é perfeito, uma vez que o único aberto não vazio de E é o próprio E e, consequentemente, a única vizinhança de qualquer ponto é o espaço todo.

Exemplo 2.2.11 Um espaço topológico discreto E não é perfeito. De facto, se $x \in E$, então $\{x\}$ é um aberto, pelo que é uma vizinhança de x.

Exemplo 2.2.12 O conjunto de Cantor[2] C é perfeito. Para o demonstrar, tome-se $x \in C$. Sejam $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$; por outras palavras, a_0 (respectivamente b_0) é o ínfimo (resp. supremo) do intervalo $I_0 = [0, 1]$. O conjunto I_1 é a reunião de dois intervalos disjuntos com o mesmo comprimento, um dos quais contém x; sejam a_1 e b_1 o ínfimo e o supremo desse intervalo respectivamente e observe-se que $b_1 - a_1 < 1/2$. O conjunto I_2 é a reunião de quatro intervalos disjuntos com o mesmo comprimento, um dos quais contém x; sejam a_2 e b_2 o ínfimo e o supremo desse intervalo respectivamente e observe-se que $b_2 - a_2 < 1/4$. Prosseguindo deste modo, obtêm-se duas sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de elementos do conjunto de Cantor[3] tais que

1. $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : x \in [a_n, b_n]$;
2. $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : 0 < b_n - a_n \leqslant 2^{-n}$.

Logo, ambas as sucessões convergem para x. Se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, então o intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém algum a_n e algum b_n. Como não podem ser ambos iguais a x, está provado que qualquer vizinhança de x contém algum ponto de C distinto de x.

Por definição, os abertos de um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ são os elementos da topologia $\mathcal{T}$. Posto de um modo mais vago, definir uma topologia $\mathcal{T}$ num conjunto E consiste em fornecer uma família de sub-conjuntos de E e dizer que estes é que são as partes abertas de E. Naturalmente, a família em questão tem que satisfazer certas condições, que são aquelas que surgem na definição de topologia. Também se poderia definir uma topologia em E dando a família dos fechados de E, que teria que satisfazer uma lista de condições análogas. Vai-se ver agora uma terceira possibilidade, nomeadamente como definir uma topologia a partir das vizinhanças de cada ponto.

Qualquer ponto x de um espaço topológico E tem, pelo menos, uma vizinhança, que é o próprio E. Além disso,

– o ponto x pertence a cada uma das suas vizinhanças;

[2]Este conjunto foi definido na página 47. Conforme foi aí referido, a expressão «conjunto de Cantor» designa o conjunto $C_{1/3}$, embora a demonstração de que é perfeito se aplique a qualquer C_α.

[3]Resulta da definição do conjunto de Cantor que este contém os extremos de cada um dos 2^n intervalos que constituem I_n, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$.

– qualquer parte de E que contenha uma vizinhança de x também é uma vizinhança de x;

– a intersecção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x;

– qualquer vizinhança V de x contém alguma vizinhança W de x tal que V é vizinhança de todos os pontos de W.

Para justificar esta última afirmação, veja-se que, por definição, se V é vizinhança de x, então existe algum aberto A tal que $x \in A$ e que $A \subset V$, pelo que A é vizinhança de x e V é vizinhança de todos os pontos de A.

Teorema 2.2.1
Seja E um conjunto e seja, para cada $x \in E$, $\mathcal{V}_x$ um conjunto não vazio de partes de E. Suponha-se que, para cada $x \in E$ e cada $V \in \mathcal{V}_x$, se tem:

1. $x \in V$;
2. $(\forall W \in \mathcal{P}(E)) : V \subset W \Longrightarrow W \in \mathcal{V}_x$;
3. $(\forall W \in \mathcal{V}_x) : V \cap W \in \mathcal{V}_x$;
4. $(\exists W \in \mathcal{V}_x)(\forall y \in W) : V \in \mathcal{V}_y$.

Então é possível definir uma e uma só topologia $\mathcal{T}$ em E tal que, para cada $x \in E$, o conjunto das vizinhanças de x em $(E, \mathcal{T})$ seja $\mathcal{V}_x$, nomeadamente

$$\mathcal{T} = \{ A \subset E \mid (\forall x \in A) : A \in \mathcal{V}_x \}. \tag{2.2}$$

Demonstração: Resulta imediatamente da proposição 2.2.2 que (2.2) é a única definição possível para $\mathcal{T}$. Vejamos que $\mathcal{T}$ é efectivamente uma topologia.

– É trivial que $\emptyset \in \mathcal{T}$.

– Se $x \in E$, então $\mathcal{V}_x$ tem algum elemento V (pois, por hipótese, $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$) e, portanto, resulta da segunda condição do enunciado que $E \in \mathcal{V}_x$. Como isto tem lugar para cada $x \in E$, $E \in \mathcal{T}$.

– Se $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, então, pela terceira condição do enunciado,

$$(\forall x \in A_1 \cap A_2) : A_1 \cap A_2 \in \mathcal{V}_x,$$

ou seja, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

– Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de $\mathcal{T}$. Para cada $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, $x \in A_i$ para algum $i \in I$ e, portanto, $A_i \in \mathcal{V}_x$. Logo, pela terceira condição do enunciado, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{V}_x$ e, como isto tem lugar para cada $i \in I$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Se $x \in E$ e se V for uma vizinhança de x em $(E, \mathcal{T})$, então existe algum $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$ e que $A \subset V$. Então, pela definição de $\mathcal{T}$, $A \in \mathcal{V}_x$ e resulta então da segunda condição do enunciado que $V \in \mathcal{V}_x$.

Para terminar a demonstração só falta ver que, reciprocamente, se $x \in E$, então qualquer $V \in \mathcal{V}_x$ é vizinhança de x em $(E, \mathcal{T})$. Seja $A = \{ y \in E \mid V \in \mathcal{V}_y \}$. Então, pela primeira condição do enunciado, $A \subset V$ e, como $V \in \mathcal{V}_x$, $x \in A$. Vai-se ver que $A \in \mathcal{T}$, o que provará que V é vizinhança de x. Seja $p \in A$. Pela quarta condição do enunciado, existe algum $W \in \mathcal{V}_p$ tal que, para cada $w \in W$, $V \in \mathcal{V}_w$. Mas, pela definição de A, $V \in \mathcal{V}_w \iff w \in A$. Logo, $W \subset A$ e a segunda condição do enunciado, juntamente com o facto de se ter $W \in \mathcal{V}_p$, mostra que $A \in \mathcal{V}_p$. Como isto tem lugar para cada $p \in A$, $A \in \mathcal{T}$. ∎

Exemplo 2.2.13 Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja

$$\mathcal{V}_x = \{ V \subset \mathbb{R} \mid (\exists a \in]x, +\infty[) :] - \infty, a[\subset V \}.$$

Nenhum destes conjuntos é vazio, pois $\mathbb{R}$ pertence a qualquer um deles. Vejamos que estão reunidas as condições do teorema anterior. Seja $V \in \mathcal{V}_x$. Por definição de $\mathcal{V}_x$, V contém algum intervalo $]-\infty, a[$ com $a > x$.

1. Tem-se $x \in]-\infty, a[\subset A$.
2. Se $V \subset W \subset \mathbb{R}$, então $]-\infty, a[\subset W$, pelo que $W \in \mathcal{V}_x$.
3. Se $W \in \mathcal{V}_x$, então W contém algum intervalo $]-\infty, a'[$ com $a' > x$. Logo, $x \in \left]-\infty, \min\{a, a'\}\right[$ e $\left]-\infty, \min\{a, a'\}\right[\subset V \cap W$, pelo que $V \cap W \in \mathcal{V}_x$.
4. Resulta da definição de $\mathcal{V}_x$ que $]-\infty, a[\in \mathcal{V}_x$. Se $y \in]-\infty, a[$, então, visto que $a > y$ e que $]-\infty, a[\subset]-\infty, a[$, $V \in \mathcal{V}_y$.

Existe então uma e uma só topologia em $\mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, o conjunto das vizinhanças de x é $\mathcal{V}_x$, que é a topologia é formada pelas partes A de $\mathbb{R}$ tais que

$$(\forall x \in A)(\exists y \in]x, +\infty[) :] - \infty, y[\subset A.$$

Verifica-se facilmente que esta topologia é formada pelo conjunto vazio e pelas reuniões de intervalos do tipo $]-\infty, a[$ ($a \in \mathbb{R}$). Como a reunião de intervalos deste tipo ou é $\mathbb{R}$ ou é outra vez um intervalo deste tipo, a topologia em questão é a topologia $\mathcal{T}$ do exemplo 2.1.1.

2.2.3 Funções contínuas

A proposição 1.3.2 mostra que, num espaço métrico, a condição «f é contínua em a» pode ser reformulada em termos de vizinhanças.

Definição 2.2.8 Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos e $a \in E_1$. Diz-se que uma função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é *contínua em* a se, para cada vizinhança V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ for uma vizinhança de a. Caso contrário, diz-se que f é *descontínua* em a.

Proposição 2.2.4
Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos. Se x for um ponto isolado de E_1, então qualquer função $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é contínua em x.

Demonstração: Se V for uma vizinhança de $f(x)$, então $f^{-1}(V) \supset \{x\}$. Como $\{x\}$ é uma vizinhança de x, $f^{-1}(V)$ também o é. ∎

Quanto à noção de função contínua, já se sabe, pela proposição 1.3.3, que pode ser reformulada em termos de abertos e fechados.

Definição 2.2.9 Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos. Diz-se que f é *contínua* se, para cada aberto A de E_2, $f^{-1}(A)$ for um aberto de E_1. Caso contrário, diz-se que f é *descontínua*.

Exemplo 2.2.14 Se E_1 e E_2 forem espaços topológicos, sendo E_1 um espaço topológico discreto, qualquer função de E_1 em E_2 é contínua.

Exemplo 2.2.15 Considere-se em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$ definida no exemplo 2.1.3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ e considere-se em X a topologia usual. Se f é uma função de X em $\mathbb{R}$ e se $a \in X$, então afirmar que f é contínua em a é o mesmo que afirmar que, para cada vizinhança V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a. Mas, relativamente à topologia $\mathcal{T}$, um conjunto V é vizinhança de $f(a)$ se e só se V contém algum intervalo da forma $]-\infty, b[$ onde b é um número real maior do que $f(a)$, ou seja, se V contém algum intervalo da forma $]-\infty, f(a)+\varepsilon[$ com $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Por outro lado, afirmar que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a é o mesmo que afirmar que $f^{-1}(V)$ contém algum intervalo da forma $]a-\delta, a+\delta[$, para algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, f é contínua em a se e só se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) :]a-\delta, a+\delta[\subset f^{-1}\big(]-\infty, f(a)+\varepsilon[\big),$$

ou seja, se e só se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*) : |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(a)+\varepsilon,$$

como tinha sido afirmado no exemplo 2.1.3.

Ao contrário do que se passa com os espaços métricos, onde é verdade por definição que uma função é contínua se e só se for contínua em todos os pontos, no contexto dos espaços topológicos este resultado necessita de uma demonstração.

Teorema 2.2.2
Sejam E_1 *e* E_2 *espaços topológicos. Dada uma função* $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$*, são então condições equivalentes:*

1. *a função* f *é contínua em todos os pontos;*
2. *a função* f *é contínua;*
3. *se* F *for um fechado de* E_2*, então* $f^{-1}(F)$ *é um fechado de* E_1.

Demonstração: Basta que se mostre que as duas primeiras condições são equivalentes. Que as duas últimas também o são já foi visto no decorrer da demonstração da proposição 1.3.3.[4]

Suponha-se então que f é contínua em todos os pontos. Se A for um aberto de E_2, quer-se mostrar que $f^{-1}(A)$ é um aberto de E_1. Se $x \in f^{-1}(A)$, então $f(x) \in A$ e, como A é aberto, é uma vizinhança de $f(x)$. Logo, uma vez que f é contínua em x, $f^{-1}(A)$ é vizinhança de x. Decorre então da proposição 2.2.2 que $f^{-1}(A)$ é um aberto, pois é vizinhança de todos os seus pontos.

Reciprocamente, se f for contínua, se $x \in E_1$ e se V é uma vizinhança de $f(x)$, quer-se mostrar que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x. Para tal, basta ver que V contém, por definição, algum aberto A tal que $f(x) \in A$. Então $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(V)$. Como f é contínua, $f^{-1}(A)$ é um aberto de E_1, pelo que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x. ∎

[4]Este é o motivo pelo qual ao demonstrar-se a proposição 1.3.3 se optou por demonstrar separadamente as duas equivalências.

Proposição 2.2.5
Sejam $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_1, \mathcal{T}_2)$ *e* $(E_3, \mathcal{T}_3)$ *espaços topológicos,* f *uma função de* E_1 *em* E_2 *e* g *uma função de* E_2 *em* E_3.

1. *Se* $a \in E_1$ *for tal que* f *é contínua em* a *e que* g *é contínua em* $f(a)$*, então* $g \circ f$ *é contínua em* a.

2. *Se* f *e* g *forem contínuas, então* $g \circ f$ *é contínua.*

Demonstração: Dado um $a \in E_1$ que satisfaça as condições da primeira alínea do enunciado, se V for uma vizinhança de $g(f(a))(= (g \circ f)(a))$, então $g^{-1}(V)$ é uma vizinhança de $f(a)$ (porque g é contínua em $f(a)$) e então $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right)$ é uma vizinhança de a (porque f é contínua em a). Mas

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right).$$

A segunda alínea pode ser demonstrada de maneira análoga. Alternativamente, pode-se recorrer à primeira alínea e ao facto de f e g serem contínuas se e só se cada uma delas for contínua em todos os pontos dos respectivos domínios. ■

Definição 2.2.10 Diz-se que uma função $f\colon (E_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (E_2, \mathcal{T}_2)$ entre espaços topológicos é um *homeomorfismo* se for uma bijecção contínua e se a inversa também for contínua.

Exemplo 2.2.16 Por exemplo, considere-se em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$ definida no exemplo 2.1.3 e a topologia $\mathcal{T}^*$ definida de maneira análoga mas considerando agora os intervalos da forma $]a, +\infty[$. Verifica-se então facilmente que

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, \mathcal{T}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{T}^*) \\ x & \rightsquigarrow & -x \end{array}$$

é um homeomorfismo de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^*)$.

Considere-se agora a seguinte situação: X é um conjunto, Y é um espaço topológico e f é uma função de X em Y. Existe alguma topologia em X relativamente à qual f seja contínua? A resposta é afirmativa; basta considerar em X a topologia discreta. Naturalmente, há muitos casos em que uma topologia menos fina do que a discreta é suficiente para que f seja contínua. De facto, qualquer topologia que contenha o conjunto $\{\, f^{-1}(A) \mid A \text{ aberto de } Y \}$ basta para tornar f contínua. Mostra-se facilmente que o conjunto anterior é uma topologia em X, que é necessariamente a topologia menos fina que se pode definir em X que torna contínua a função f.

Definição 2.2.11 Se X é um conjunto, $(Y, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e f é uma função de X em Y, designa-se por *topologia inicial* em X relativamente à função f a topologia $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{T}\}$.

Observe-se que se E é um espaço topológico e F é um sub-espaço topológico de E, então a topologia de F é a topologia inicial relativamente à inclusão $i\colon F \longrightarrow E$.

Exemplo 2.2.17 Considere-se, por exemplo, a função f de $\mathbb{R}$ na circunferência unitária S^1 assim definida (veja-se a figura 2.1): se $x \in \mathbb{R}$, então

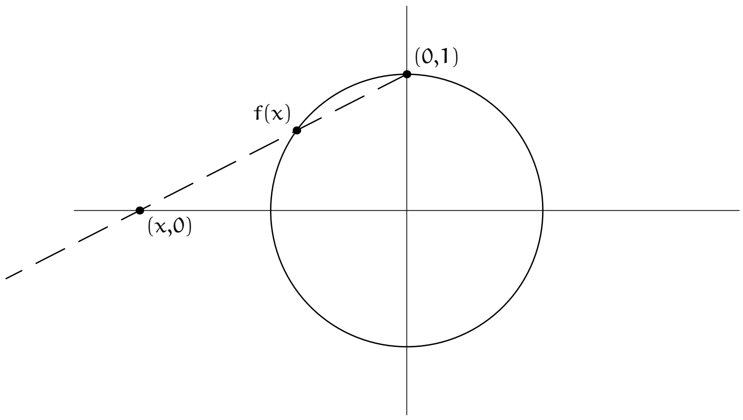

Figura 2.1: Construção de uma função de $\mathbb{R}$ em S^1.

a semi-recta com origem em $(0,1)$ que passa por $(x,0)$ intersecta S^1 em dois pontos distintos, um dos quais é $(0,1)$; seja $f(x)$ o outro ponto. A função f é injectiva e a sua imagem é $S^1 \setminus \{(0,1)\}$, podendo então ser prolongada a uma e uma só bijecção (que também vai ser representada por f) do conjunto $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ em S^1. Considere-se em $\overline{\mathbb{R}}$ a topologia inicial $\mathcal{T}$ relativamente a f. Verifica-se facilmente que o espaço topológico $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}\right)$ é metrizável; basta considerar a métrica

$$\begin{array}{rccc} d_f\colon & \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & \big\|f(x) - f(y)\big\|. \end{array}$$

Um cálculo simples mostra que a expressão analítica da função f é

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{x^2-1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ (0,1) & \text{se } x = \infty. \end{cases}$$

Uma observação importante relativa a este método de definir métricas em conjuntos, i. e. partir de uma bijecção f de um conjunto X num espaço métrico Y e definir uma métrica d_f em X por $d_f(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big)$, é a seguinte: a função f é uma isometria do espaço métrico (X, d_f) no espaço métrico (Y, d). Em particular, deduz-se da proposição 1.5.1 que $\big(\overline{\mathbb{R}}, d_f\big)$ é um espaço métrico completo.

Proposição 2.2.6
Sejam X um conjunto, Y e Z espaços topológicos, f uma função de X em Y e g uma função de Z em X. Se se considerar em X a topologia inicial relativamente à função f, são condições equivalentes:

1. *a função g é contínua;*
2. *a função $f \circ g$ é contínua.*

Demonstração: Visto que f é contínua, é claro que se g for contínua então $f \circ g$ também é contínua. Reciprocamente, suponha-se que $f \circ g$ é contínua. Se A for um aberto de X, quer-se então provar que $g^{-1}(A)$ é um aberto de Z. Afirmar que A é um aberto de X é o mesmo que afirmar que $A = f^{-1}(A')$ para algum aberto A' de Y. Logo

$$g^{-1}(A) = g^{-1}\left(f^{-1}(A')\right) = (f \circ g)^{-1}(A'),$$

que é um aberto de Z. ∎

Exemplo 2.2.18 Considere-se a função

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} \tan(x) & \text{se } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vejamos que φ é contínua se se considerar em $\overline{\mathbb{R}}$ a topologia do exemplo 2.2.17 (e em $\mathbb{R}$ a topologia usual). Pela proposição anterior, φ é contínua se e só se $f \circ \varphi$ for uma função contínua de $\mathbb{R}$ em S^1. Mas, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\big(\varphi(x)\big) &= \begin{cases} \left(\frac{2\tan(x)}{\tan^2(x)+1}, \frac{\tan^2(x)-1}{\tan^2(x)+1}\right) & \text{se } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ (0,1) & \text{se } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \big(\operatorname{sen}(2x), -\cos(2x)\big) & \text{se } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ (0,1) & \text{se } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \big(\operatorname{sen}(2x), -\cos(2x)\big), \end{aligned}$$

pelo que $f \circ \varphi$ é obviamente contínua.

Naturalmente, se se considerar agora um espaço topológico X, um conjunto Y e uma função $f\colon X \longrightarrow Y$, levanta-se a questão análoga de saber qual é a topologia *mais* fina que torna contínua a função f. Claramente, trata-se daquela que surge na próxima definição.

Definição 2.2.12 Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, Y é um conjunto e f é uma função de X em Y, designa-se por *topologia final* em Y relativamente à função f a topologia $\{\, A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \}$.

Seja $P_2(\mathbb{R})$ o conjunto das rectas de $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem. Considere-se a função $\pi\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ que envia cada $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ na recta que passa por p e por 0. Então pode-se considerar em $P_2(\mathbb{R})$ a topologia final $\mathcal{T}$ relativamente a π. O espaço topológico $(P_2(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ designa-se por «plano projectivo».

Pode-se mostrar, de modo análogo ao que foi feito para a proposição 2.2.6, que é válido o seguinte resultado:

Proposição 2.2.7
Sejam Y um conjunto, X e Z espaços topológicos, f uma função de X em Y e g uma função de Y em Z. Se se considerar em Y a topologia final relativamente à função f, são condições equivalentes:

1. *a função g é contínua;*
2. *a função $g \circ f$ é contínua.*

Exemplo 2.2.19 Por exemplo, seja $f\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função assim definida: se r é a recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e pelo ponto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, então

$$f(r) = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Esta função está bem definida, i. e. $f(r)$ depende unicamente da recta r e não do ponto (x, y, z) escolhido, pois se (a, b, c) for outro ponto de $r \setminus \{(0, 0, 0)\}$, então $(a, b, c) = \lambda(x, y, z)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelo que

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\lambda^2(xy + yz + zx)}{\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A função f é então uma função contínua, pois $f \circ \pi$ é a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \rightsquigarrow & \dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{array}$$

2.2.4 Aderência e interior

Foi definida na página 15 a noção de aderência e de interior num espaço métrico e é claro que se pode adoptar a mesma definicão no contexto dos espaços topológicos. A proposição 1.3.1 e o corolário 1.3.1 continuam válidos no contexto dos espaços topológicos, pois as suas demonstrações não empregaram nada específico de espaços métricos. Observe-se que, tal como no caso dos espaços métricos, a relação (1.6) (vista na página 15) é válida nos espaços topológicos. Logo, qualquer resultado relativo a aderências pode, passando aos complementares, ser transformando num resultado relativo a interiores e reciprocamente.

Proposição 2.2.8
Seja E um espaço topológico. Então

1. *se* $A \subset E$, $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
2. $\mathring{E} = E$ *e* $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
3. *se* $A \subset E$, *então* $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ *e* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
4. *se* $A, B \subset E$, *então* $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ *e* $\overline{A} \subset \overline{B}$;
5. *se* $A, B \subset E$, *então* $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ *e* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demonstração: Cada alínea desta proposição contém duas afirmações, das quais será demonstrada apenas a primeira; a segunda pode deduzir--se daí empregando a observação que precede o enunciado.

A primeira e a segunda alíneas são triviais, a terceira resulta de $\mathring{A}$ ser um aberto e a quarta de que se $a \in \mathring{A}$, então A é vizinhança de a, pelo que, caso $B \supset A$, B também é vizinhança de a. Quanto à quinta alínea, basta observar que:

– como $\mathring{A}$ e $\mathring{B}$ são abertos, a sua intersecção também o é, pelo que

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B \Longrightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overbrace{A \cap B}^{\circ};$$

– como $A \cap B$ está contido em A e em B, $\overbrace{A \cap B}^{\circ}$ está contido em $\mathring{A}$ e em $\mathring{B}$, pelo que está contido na intersecção. ■

Se f é uma função de um espaço topológico E_1 num espaço topológico E_2 e se $a \in E_1$, então afirmar que f é contínua em a é, posto de uma maneira vaga, afirmar que f envia pontos próximos de a em pontos próximos de $f(a)$. Isto pode ser formalizado, observando que dizer que que um conjunto $X \subset E_1$ contém pontos tão próximos de a quanto se queira é afirmar que qualquer vizinhança de a intersecta X, i. e. que $a \in \overline{X}$.

Proposição 2.2.9
Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos, f uma função de E_1 em E_2 e $a \in E_1$. São então condições equivalentes:

1. *a função f é contínua em a;*
2. *se $X \subset E_1$ for tal que $a \in \overline{X}$, então $f(a) \in \overline{f(X)}$.*

Demonstração: Se f for contínua em a e se $X \subset E_1$ for tal que $a \in \overline{X}$, quer-se mostrar que $f(a) \in \overline{f(X)}$. Seja V uma vizinhança de $f(a)$. Então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a, pelo que existe algum $x \in f^{-1}(V) \cap X$. Mas então $f(x) \in V \cap f(X)$, pelo que este último conjunto não é vazio. Como isto tem lugar para cada vizinhança de $f(a)$, $f(a) \in \overline{f(X)}$.

Suponha-se agora que a segunda condição do enunciado se verifica. Quer-se provar que f é contínua em a. Seja então V uma vizinhança de $f(a)$; quer-se provar que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a. Visto que V é vizinhança de $f(a)$, $f(a) \notin \overline{V^{\complement}}$. Logo, $a \notin \overline{f^{-1}\left(V^{\complement}\right)}$, pois

$$a \in \overline{f^{-1}\left(V^{\complement}\right)} \Longrightarrow f(a) \in \overline{f\left(f^{-1}\left(V^{\complement}\right)\right)} \subset \overline{V^{\complement}}.$$

Mas

$$\begin{aligned} a \notin \overline{f^{-1}\left(V^{\complement}\right)} &\Longleftrightarrow a \notin \overline{f^{-1}(V)^{\complement}} \\ &\Longleftrightarrow a \in \overline{f^{-1}(V)^{\complement}}^{\complement} \\ &\Longleftrightarrow a \in \overbrace{f^{-1}(V)}^{\circ} \text{ (por (1.6))}, \end{aligned}$$

ou seja, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a. ■

Corolário 2.2.1
Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos e f uma função de E_1 em E_2. São então condições equivalentes:

1. *a função f é contínua;*
2. *se $X \subset E_1$, então $f\left(\overline{X}\right) \subset \overline{f(X)}$.*

Demonstração: Pela proposição anterior, f é contínua se e só se

$$(\forall a \in E_1)(\forall X \subset E_1) : a \in \overline{X} \Longrightarrow f(a) \in \overline{f(X)}.$$

Trocando estes dois quantificadores obtém-se a segunda condição do enunciado. ■

Definição 2.2.13 Se E é um espaço topológico e $X \subset E$, designa-se por *fronteira* de X e representa-se por $\mathrm{Fr}(X)$ o conjunto $\overline{X} \cap \overline{X^{\complement}}$.

Há três consequências imediatas desta definição:

1. o conjunto $\mathrm{Fr}(X)$ é fechado, pois é, por definição, a intersecção de dois fechados;
2. $\mathrm{Fr}(X) = \mathrm{Fr}(X^{\complement})$;
3. resulta da relação (1.6) que $\mathrm{Fr}(X)$ também se poderia definir por $\overline{X} \setminus \mathring{X}$.

Exemplo 2.2.20 Em $\mathbb{R}^2$ a fronteira de um disco aberto $B(a, r)$ é a circunferência

$$S(a, r) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| = r \right\}.$$

De facto, se $x \in S(a, r)$ e se $t \in \mathbb{R}_+$ (veja-se a figura 2.2), então

$$\|x - (a + t(x - a))\| = |1 - t|.\|x - a\| = |1 - t|.r,$$

pelo que, fixado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se que $a + t(x - a) \in B(x, \varepsilon)$ se e só

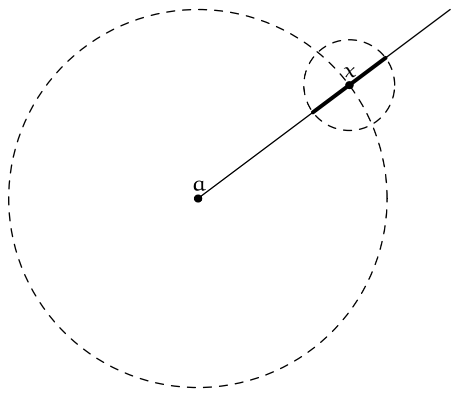

Figura 2.2: Fronteira de um disco aberto.

se $t \in]1 - \varepsilon/r, 1 + \varepsilon/r[$. Mas então $B(x, \varepsilon)$ intersecta $B(a, r)$ (pois $x +$

$t(a-x) \in B(a,r) \cap B(x,\varepsilon)$ se $t \in]1 - r/\varepsilon, 1[$) e intersecta $B(a,r)^\complement$ (pois o próprio x pertence a ambos os conjuntos). Está então provado que $S(a,r) \subset \mathbf{Fr}(B(a,r))$. Reciprocamente, se $x \notin S(a,r)$ então $x \in B(a,r)$ ou $x \in B'(a,r)^\complement$. Mas se $x \in B(a,r)$ então, como $B(a,r)$ é aberto e não intersecta $B(a,r)^\complement$, $x \notin \overline{B(a,r)^\complement}$. Analogamente, se $x \in B'(a,r)^\complement$ então $x \notin \overline{B(a,r)}$. Consequentemente, $x \notin \mathbf{Fr}(B(a,r))$.

Não se deve pensar que, em qualquer espaço métrico, a fronteira de uma bola aberta $B(a,r)$ seja $\{\, x \in E \mid d(x,a) = r \,\}$. Basta ver que, num espaço métrico discreto E, a fronteira de qualquer conjunto é vazia, mas se $a \in E$, então $\{\, x \in E \mid d(x,a) = 1 \,\} = E \setminus \{a\}$.

Tal como no caso das definições de aderência e de interior, a definição de conjunto denso, que foi feita na página 19, não necessita de qualquer alteração no contexto dos espaços topológicos.

Exemplo 2.2.21 Vai-se mostrar que a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & P_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & \pi(x,y,1), \end{array}$$

onde $P_2(\mathbb{R})$ e π foram definidos na página 84 (veja-se a figura 2.3 para visualizar a função f), tem imagem densa. Para tal, sejam $p \in P_2(\mathbb{R})$ e V uma vizinhança de p; quer-se mostrar que V contém algum ponto da imagem de f. Sabe-se que p é da forma $\pi(x,y,z)$ e que V contém algum aberto A tal que $p \in A$. Dizer que A é aberto é o mesmo que dizer que $\pi^{-1}(A)$ é um aberto de $\mathbb{R}^3$. Como $(x,y,z) \in \pi^{-1}(A)$ e este conjunto é aberto, $\pi^{-1}(A)$ contém algum elemento da forma (x,y,z') com $z' \neq 0$. Logo, $\pi(x,y,z') \in A$, ou seja, $f(x/z', y/z') \in A \subset V$.

Definição 2.2.14 Diz-se que um espaço topológico é *separável* se possuir algum sub-conjunto numerável e denso.

Exemplo 2.2.22 Por exemplo, $\mathbb{R}$ é separável relativamente à topologia usual pois $\mathbb{Q}$ é um sub-conjunto numerável e denso. No entanto, $\mathbb{R}$ não é separável relativamente à topologia discreta, pois a aderência de quelquer sub-conjunto (numerável ou não) é o próprio conjunto.

2.2.5 Sucessões

A noção de sucessão convergente pode ser reformulada em termos de vizinhanças. De facto, vê-se facilmente que se E é um espaço métrico,

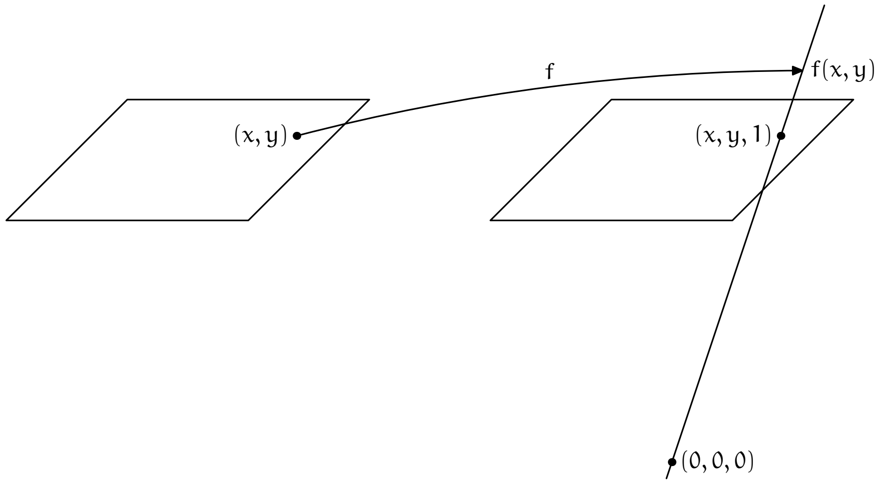

Figura 2.3: Função f do plano no plano projectivo. A imagem torna claro que f é injectiva e que a sua imagem é formada por todas as rectas não horizontais de $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem.

$l \in E$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de E, então l é limite da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se e só se para cada vizinhança V de x existir $p \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geqslant p \Longrightarrow x_n \in V$.

Definição 2.2.15 Sejam E um espaço topológico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E. Diz-se que a sucessão é *convergente* se, para algum $l \in E$, se tiver, para cada vizinhança V de l,

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow x_n \in V;$$

diz-se então que l é *limite* da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e representa-se

$$l = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não for convergente diz-se que é *divergente*.

Exemplo 2.2.23 Em qualquer espaço topológico as sucessões quase-constantes são convergentes.

Exemplo 2.2.24 Considere-se em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$ definida no exemplo 2.1.3. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão convergente de elementos de $(E, \mathcal{T})$ e se l for limite da sucessão, então qualquer número l' menor do que l também é limite da sucessão, pois qualquer vizinhança de l contém um aberto que contém l, pelo que também contém l'.

Exemplo 2.2.25 Considere-se em $\widehat{\mathbb{R}}$ a topologia $\mathcal{T}$ definida no exemplo 2.1.1. Afirmar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão real convergente para $+\infty$ é o mesmo que afirmar que qualquer vizinhança V de $+\infty$ contém os x_n com n suficientemente grande. Mas afirmar que V é vizinhança de $+\infty$ é o mesmo que afirmar que contém um aberto que contém $+\infty$, ou seja, é o mesmo que afirmar que, para algum $a \in \mathbb{R}$, $]a, +\infty] \subset V$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $+\infty$ em $\left(\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{T}\right)$ se e só se

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow x_n > a,$$

i. e. se e só se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite $+\infty$, tal como este limite é definido nos cursos de Análise Real. Analogamente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $-\infty$ em $\left(\widehat{\mathbb{R}}, \mathcal{T}\right)$ se e só se tem limite $-\infty$. Finalmente, verifica-se facilmente que, para uma sucessão real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e para um número real x, x é limite da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ relativamente à topologia usual se e só se o mesmo ocorrer relativamente à topologia $\mathcal{T}$.

Como se pode ver pelo exemplo 2.2.24, não é verdade que num espaço topológico E qualquer sucessão convergente tem um e um só limite, embora este resultado permaneça válido se se supuser que E é separado. De facto, se $l \in E$ for limite de uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e se $l' \in E \setminus \{l\}$, então existem vizinhanças V e V' de l e de l' respectivamente que não se intersectam. Por definição de sucessão convergente, tem-se $x_n \in V$ para n suficientemente grande, pelo que só se pode ter $x_n \in V'$ num número finito de casos. Logo, l' não é limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mas continua a ser verdade que se uma sucessão de elementos de um espaço topológico converge e se l é limite da sucessão, então l também é limite de qualquer sub-sucessão da sucessão dada.

Quanto às proposições 1.4.4 e 1.4.5 e ao corolário 1.4.1, nenhum destes resultados é válido em geral em espaços topológicos, embora sejam válidos em espaços topológicos 1-numeráveis. Na demonstração da próxima proposição será visto como se usa esta hipótese. É necessário começar por introduzir um novo conceito.

Definição 2.2.16 Sejam E um espaço topológico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F_n = \{\, x_m \mid m \geqslant n \,\}$. Se $x \in E$, diz-se que x é um *ponto aderente* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}.$$

Naturalmente, uma sucessão pode não ter pontos aderentes; é o caso, por exemplo, da sucessão $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, encarada como sucessão de $\mathbb{R}$

munido da topologia usual. Por outro lado, é claro que se l for limite de uma sucessão, então l é ponto aderente dessa sucessão.

Proposição 2.2.10
Seja E um espaço topológico 1-numerável e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E. Então os pontos aderentes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são os elementos de E que são limite de alguma sub-sucessão da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demonstração: Se x for limite de alguma sub-sucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então cada vizinhança V de x contém todos os x_{n_k} com $k \geqslant p$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Se $n \in \mathbb{N}$, existe algum $k \geqslant p$ tal que $n_k \geqslant n$ e, consequentemente, $x_{n_k} \in V$. Logo, $x \in \overline{F_n}$.

Reciprocamente, se x for ponto aderente da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, seja $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sistema fundamental de vizinhanças de x. Como V_1 é vizinhança de x e $x \in \overline{F_1}$, V_1 contém algum termo x_{n_1} da sucessão. Como $V_1 \cap V_2$ é vizinhança de x e $x \in \overline{F_{n_1+1}}$, $V_1 \cap V_2$ contém algum termo x_{n_2} da sucessão com $n_2 > n_1$. Prosseguindo deste modo, obtém-se uma sub-sucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : x_{n_k} \in \bigcap_{j=1}^{k} V_j.$$

Vai-se mostrar que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x. Para tal, fixe-se uma vizinhança V de x; quer-se mostrar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in V$ quando $k \geqslant p$. Visto que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x, existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $V_p \subset V$. Logo

$$k \geqslant p \Longrightarrow x_{n_k} \in \bigcap_{j=1}^{k} V_j \subset V_p \subset V.$$

■

Como foi observado antes do enunciado da proposição, esta demonstração permite ver como se emprega a hipótese da 1-numerabilidade se se pretender demonstrar as proposições 1.4.4 e 1.4.5 e o corolário 1.4.1 no âmbito dos espaços topológicos 1-numeráveis. Repare-se que aqueles resultados permanecem em parte válidos mesmo sem se supor essa hipótese.

Exemplo 2.2.26 Se E_1 e E_2 são espaços topológicos, $a \in E_1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de E_1 da qual a é limite e $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ é uma função contínua em a, então $f(a)$ é limite da sucessão $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. De facto, se V for vizinhança de $f(a)$, então $f^{-1}(V)$ é vizinhança de a, pelo que $a_n \in f^{-1}(V)$ para n suficientemente grande, ou seja, $f(a_n) \in V$ para n suficientemente grande.

2.2.6 Espaços topologicamente completos

Já se mostrou que um grande número de noções introduzidas no contexto dos espaços métricos pode ser reformulada em termos da topologia dos espaços métricos e, consequentemente, pode ser adaptada aos espaços topológicos. Diz-se que uma tal noção é uma noção *topológica*. Uma noção que não possa ser reformulada em termos da topologia é aquilo que se designa por uma noção *métrica*. Como é que se pode verificar se uma noção é ou não métrica? Tome-se, por exemplo, a noção de «conjunto limitado». Em $\mathbb{Z}$ considerem-se a métrica usual e a métrica discreta, as quais, como foi visto na página 68, são equivalentes; por outras palavras, dão origem à mesma topologia. Observe-se que $\mathbb{N}$, que é um sub-conjunto não limitado de $\mathbb{Z}$ relativamente à métrica usual, é limitado relativamente à métrica discreta. Consequentemente, um sub-conjunto de um espaço métrico ser ou não ser limitado não depende unicamente da topologia envolvida e, portanto, a noção de «conjunto limitado» é uma noção métrica.

Analogamente, as noções de «sucessão de Cauchy» e de «espaço completo» são métricas e não topológicas. Para o demonstrar, considerem-se em $]-1,1[$ a métrica usual (representada pela letra d) e a métrica

$$\begin{array}{rccc} d'\colon &]-1,1[\times]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & \left|\dfrac{x}{1-|x|}-\dfrac{y}{1-|y|}\right|. \end{array}$$

A topologia de $(]-1,1[,d')$ é a usual, pois a função identidade de $(]-1,1[,d)$ em $(]-1,1[,d')$ é um homeomorfismo. Mas, conforme foi observado na página 83,

$$\begin{array}{rccc} f\colon & (]-1,1[,d') & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \dfrac{x}{1-|x|} \end{array}$$

é uma isometria, relativamente à métrica usual em $\mathbb{R}$. Logo,

- a sucessão $(1-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, que é uma sucessão de Cauchy em $]-1,1[$ relativamente à métrica usual, não o é uma relativamente à métrica d', pois se o fosse então, pela proposição 1.4.7, a sucessão $(f(1-1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ (i. e. a sucessão $(n-1)_{n\in\mathbb{N}}$) seria uma sucessão de Cauchy de $\mathbb{R}$ relativamente à métrica usual;
- relativamente à métrica usual, $]-1,1[$ não é completo, embora o seja relativamente à métrica d', como se deduz da existência da isometria f e da proposição 1.5.1.

Veja-se agora que se E for um espaço topológico metrizável e se se conseguir mostrar que a sua topologia é proveniente de uma métrica d tal que (E, d) é completo, então, pelo teorema de Baire, qualquer família de abertos densos de E tem intersecção densa, pois os conceitos «conjunto aberto» e «conjunto denso» são topológicos. Isto sugere que se introduza o seguinte conceito:

Definição 2.2.17 Um espaço topológico diz-se *topologicamente completo* se a sua topologia for proveniente de alguma métrica d tal que (E, d) seja um espaço métrico completo.

Com esta noção, pode-se reformular o teorema de Baire.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Baire)
Num espaço topológico topologicamente completo qualquer família numerável de abertos densos tem intersecção densa.

Embora possa parecer que tudo o que foi feito foi voltar a enunciar o teorema de Baire, este resultado é de facto muito mais geral. Para compreender porquê, considere-se $]-1,1[$ munido da topologia usual. Naturalmente, esta topologia provém da métrica usual e $]-1,1[$ munido desta métrica não é um espaço métrico completo. No entanto, $]-1,1[$ munido da topologia usual é topologicamente completo, como foi visto na página ao lado. Logo, satisfaz as condições do teorema de Baire.

É mesmo possível mostrar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ munido da topologia usual é topologicamente completo! Basta considerar uma enumeração $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos racionais e definir em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a distância

$$d(x,y) = |x-y| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \inf\left\{1, \left|\max_{j\leqslant n} \frac{1}{|x-q_j|} - \max_{j\leqslant n} \frac{1}{|y-q_j|}\right|\right\}.$$

É conveniente neste contexto redefinir o conceito de completamento.

Definição 2.2.18 Se $(E, \mathcal{T})$ for um espaço topológico metrizável, um *completamento* de E é um completamento de (E, d), onde d é uma métrica da qual a topologia $\mathcal{T}$ seja proveniente.

Se, por exemplo, se considerar $\mathbb{R}$ munido da topologia usual é claro que o próprio conjunto $\mathbb{R}$, munido da métrica usual, é um seu completamento. Mas não é o único! Vão ser vistos três outros completamentos de $\mathbb{R}$. Para cada um deles, vai-se considerar uma função injectiva f de $\mathbb{R}$ num espaço métrico completo (E, d) e considerar em $\mathbb{R}$ a métrica

$$\begin{array}{rccc} d_f\colon & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & d\big(f(x), f(y)\big). \end{array}$$

Como foi observado na página 83, f é então uma isometria de $(\mathbb{R}, d_f)$ na imagem de f. Em cada um dos casos, a métrica d_f vai ser equivalente à usual e $f(\mathbb{R})$ vai ser uma parte não fechada de E, pelo que, pela proposição 1.5.1, $(\mathbb{R}, d_f)$ não será completo. Um completamento de $\mathbb{R}$ será então a aderência de $f(\mathbb{R})$ em (E, d).

1. Considere-se

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \rightsquigarrow & x, \end{array}$$

   com a métrica em $\widehat{\mathbb{R}}$ definida na página 82. É claro que a aderência de $f(\mathbb{R})(= \mathbb{R})$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é $\overline{\mathbb{R}}$. Então o completamento de $(\mathbb{R}, d_f)$ é obtido acrescentando o ponto ∞ a $\mathbb{R}$.

2. Considere-se agora

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{R}} \\ & x & \rightsquigarrow & x, \end{array}$$

   com a métrica em $\widehat{\mathbb{R}}$ definida pela expressão (2.1) (página 69). É claro que a aderência de $f(\mathbb{R})(= \mathbb{R})$ em $\widehat{\mathbb{R}}$ é $\widehat{\mathbb{R}}$. Então o completamento de $(\mathbb{R}, d_f)$ é obtido acrescentando os pontos $+\infty$ e $-\infty$ a $\mathbb{R}$.

3. Finalmente, se se definir

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \rightsquigarrow & \big(e^x, \operatorname{sen}(e^{-x})\big) \end{array}$$

   então $f(\mathbb{R})$ é o conjunto

$$S = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0 \text{ e } y = \operatorname{sen}(1/x) \,\right\}$$

   (veja-se a figura 2.4), cuja aderência, relativamente à topologia usual em $\mathbb{R}^2$, é $S \cup \{\{0\} \times [-1, 1]\}$. Logo, este completamento de $\mathbb{R}$ exige que se acrescentem a $\mathbb{R}$ uma infinidade de pontos.

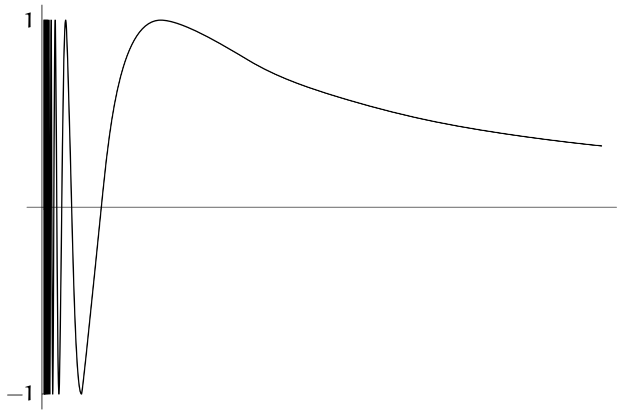

Figura 2.4: Esta figura representa o conjunto S dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x > 0$ e $y = \operatorname{sen}(1/x)$. Não é difícil mostrar que o conjunto $\overline{S} \setminus S$ é formado pelo segmento de recta que une $(0, -1)$ a $(0, 1)$.

2.3 Produtos de espaços topológicos

Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos e sejam π_1 e π_2 as projecções de $E_1 \times E_2$ em E_1 e E_2 respectivamente. Por outras palavras, seja π_i ($i \in \{1, 2\}$) a função de $E_1 \times E_2$ em E_i tal que

$$(\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2) : \pi_i(x_1, x_2) = x_i.$$

Quer-se definir uma topologia em $E_1 \times E_2$ tal que

1. as funções π_1 e π_2 sejam contínuas;
2. se Z é um espaço topológico e se f é uma função de Z em $E_1 \times E_2$, então f é contínua se e só se $\pi_1 \circ f$ e $\pi_2 \circ f$ forem contínuas.

No que se refere a esta última condição, veja-se que é o que ocorre em Análise Real: uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua se e só se cada uma das suas componentes é contínua.

Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ as topologias de E_1 e de E_2 respectivamente. Para que a projeção π_1 seja contínua é preciso que, se $A \in \mathcal{T}_1$, ${\pi_1}^{-1}(A)$ seja um aberto de $E_1 \times E_2$; posto de outro modo, é preciso que $A \times E_2$ seja um aberto de $E_1 \times E_2$. Analogamente, para que a projeção π_2 seja contínua é preciso que, dado $A \in \mathcal{T}_2$, $E_1 \times A$ seja um aberto de $E_1 \times E_2$. Logo, se uma topologia $\mathcal{T}$ em $E_1 \times E_2$ satisfaz a primeira das duas condições atrás enunciadas e se A_1 e A_2 são abertos de E_1 e de E_2 respectivamente, $\mathcal{T}$

tem de conter $A_1 \times E_2$ e $E_1 \times A_2$. Como $\mathcal{T}$ é estável para intersecções finitas, terá então também de conter $A_1 \times A_2$. Seja

$$\mathcal{B} = \{\, A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ e } A_2 \in \mathcal{T}_2 \,\}.$$

Veja-se que $\mathcal{B}$ não é, em geral, uma topologia; por exemplo, se $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ (munido da topologia usual), então $]-1,1[\times]-2,2[$ e $]-2,2[\times]-1,1[$ pertencem a $\mathcal{B}$, mas não a sua reunião. No entanto, é claro que a intersecção de um número finito de elementos de $\mathcal{B}$ é novamente um elemento de $\mathcal{B}$. Consequentemente, o conjunto $\mathcal{T}$ formado pelas reuniões de elementos de $\mathcal{B}$ é uma topologia da qual $\mathcal{B}$ é uma base.

Pela sua construção, a topologia $\mathcal{T}$ satisfaz a primeira das duas condições acima enunciadas. Vai-se ver agora que também satisfaz a segunda. Sejam então Z um espaço topológico e f uma função de Z em $E_1 \times E_2$. É claro que se f for contínua então $\pi_1 \circ f$ e $\pi_2 \circ f$ são contínuas. Falta ver que, reciprocamente, se $\pi_1 \circ f$ e $\pi_2 \circ f$ são contínuas então f é contínua. Seja A um aberto de $E_1 \times E_2$; quer-se mostrar que $f^{-1}(A)$ é um aberto de Z. Pela definição de $\mathcal{T}$ sabe-se que A é da forma

$$\bigcup_{j \in J} A_{1,j} \times A_{2,j},$$

onde $(A_{1,j})_{j\in J}$ e $(A_{2,j})_{j\in J}$ são famílias de abertos de E_1 e de E_2 respectivamente. Como

$$\begin{aligned}
f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} A_{1,j} \times A_{2,j}\right) &= \bigcup_{j\in J} f^{-1}\left(A_{1,j} \times A_{2,j}\right)\\
&= \bigcup_{j\in J} f^{-1}\left((A_{1,j} \times E_2) \cap (E_1 \times A_{2,j})\right)\\
&= \bigcup_{j\in J} f^{-1}\left(A_{1,j} \times E_2\right) \cap f^{-1}\left(E_1 \times A_{2,j}\right)\\
&= \bigcup_{j\in J} (\pi_1 \circ f)^{-1}(A_{1,j}) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(A_{2,j})
\end{aligned}$$

e se está a supor que $\pi_1 \circ f$ e $\pi_2 \circ f$ são contínuas, está então provado que $f^{-1}(A)$ é um aberto de Z.

Exemplo 2.3.1 Vai-se mostrar que a topologia usual de $\mathbb{R}^2$ é a topologia $\mathcal{T}$ atrás definida no caso particular em que $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$. De facto, seja $\mathcal{T}_u$ a topologia usual.

$\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$: Se $A \in \mathcal{T}_u$ então A é reunião de discos abertos. Mas se $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ então, para cada $(y_1, y_2) \in B((x_1, x_2), r)$ sabe-se que (veja-se o exemplo 1.3.2 na página 11):

$$B((y_1, y_2), r - \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|) \subset B((x_1, x_2), r).$$

Se se designar $r - \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\|$ por r', tem-se

$$\begin{aligned}(y_1, y_2) \in &\left]y_1 - \frac{r'}{\sqrt{2}}, y_1 + \frac{r'}{\sqrt{2}}\right[\times \left]y_2 - \frac{r'}{\sqrt{2}}, y_2 + \frac{r'}{\sqrt{2}}\right[\\ &\subset B((y_1, y_2), r').\end{aligned}$$

Logo, A é reunião de produtos de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ e, portanto, $A \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_u$: Se $A \in \mathcal{T}$ então A é reunião de conjuntos da forma $A_1 \times A_2$ onde A_1 e A_2 são abertos de $\mathbb{R}$. Mas A_1 e A_2 são, por sua vez, reuniões de intervalos abertos de $\mathbb{R}$, pelo que $A_1 \times A_2$ é reunião de conjuntos da forma $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$. Como estes conjuntos pertencem a $\mathcal{T}_u$, $A \in \mathcal{T}_u$.

Considere-se agora uma família $(E_i)_{i \in I}$ de espaços topológicos. Como é que se pode definir uma topologia em $\prod_{i \in I} E_i$ que satisfaça as condições análogas às duas condições enunciadas na página 95? Poder-se-ia pensar que seria a topologia que tem por base os produtos de abertos dos E_i. De facto assim é caso I seja finito, mas no caso geral é preciso levar em conta que se $j \in I$ e se A é um aberto de E_j então, para que a projecção $\pi_j \colon \prod_{i \in I} E_i \longrightarrow E_j$ seja contínua, é preciso que a topologia de $\prod_{i \in I} E_i$ contenha $\prod_{i \in I} A_i$ onde

$$A_i = \begin{cases} A & \text{se } i = j \\ E_i & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como a topologia de $\prod_{i \in I} E_i$ vai ter que ser estável para intersecções finitas, então basta definir $\mathcal{B}$ como sendo o conjunto dos produtos $\prod_{i \in I} A_i$ onde cada A_i é um aberto de E_i e, além disso, tem-se $A_i = E_i$ excepto num número finito de casos.

Definição 2.3.1 Se $(E_i)_{i \in I}$ for uma família de espaços topológicos, define-se a *topologia produto* no conjunto $\prod_{i \in I} E_i$ como sendo a topologia formada pelas reuniões de conjuntos da forma $\prod_{i \in I} A_i$ onde

1. cada A_i é um aberto de E_i;

2. cada A_i, com um número finito de excepções, é igual a E_i.

Proposição 2.3.1
Sejam $(E_i)_{i\in I}$ *uma família de espaços topológicos,* Z *um espaço topológico e* f *uma função de* Z *em* $\prod_{i\in I} E_i$*. Então* f *é contínua relativamente à topologia produto se e só se, para cada* $i \in I$*,* $\pi_i \circ f$ *for contínua.*

Esta proposição não será demonstrada pois não há qualquer diferença substancial relativamente ao que feito quanto ao produto de dois espaços topológicos.

Proposição 2.3.2
Sejam $(E_i)_{i\in I}$ *uma família de espaços topológicos,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de elementos de* $\prod_{i\in I}(E_i)_{i\in I}$ *e* $(l_i)_{i\in I}$ *um elemento de* $\prod_{i\in I} E_i$*. Então* $(l_i)_{i\in I}$ *é limite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *relativamente à topologia produto se e só se, para cada* $i \in I$*,* l_i *for limite da sucessão* $\big(\pi_i(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demonstração: Como as projecções são contínuas, já se sabe (cf. exemplo 2.2.26) que se $(l_i)_{i\in I}$ é limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então, para cada $i \in I$, l_i é limite da sucessão $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Suponha-se agora que, para cada $i \in I$, l_i é limite da sucessão $(\pi_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Se V for uma vizinhança de $(l_i)_{i\in I}$, então V contém algum aberto A que contém $(l_i)_{i\in I}$. Sabe-se, pela definição da topologia produto, que existe um conjunto finito $F \subset I$ tal que A contém um conjunto da forma $\prod_{i\in I} A_i$ tal que

– $(l_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$;

– se $i \in I$, A_i é um aberto de E_i;

– se $i \in I \setminus F$, então $A_i = E_i$.

Para cada $i \in F$ existe algum $p_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p_i \Longrightarrow \pi_i(l_n) \in A_i,$$

pois A_i é uma vizinhança de $\pi_i(l_n)$. Logo, se definir $p \in \mathbb{N}$ por $p = \max\{\, p_i \mid i \in F \,\}$, então

$$(\forall i \in I)(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow \pi_i(x_n) \in A_i,$$

ou seja

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow x_n \in \prod_{i\in I} A_i \subset A \subset V.$$

■

Observe-se que esta proposição permite encurtar a demonstração de que $\mathbb{R}^n$ é completo (veja-se o exemplo 1.5.2 na página 33).

Para terminar esta secção, vai-se ver como é possível definir, dado um conjunto X, uma topologia no conjunto $\mathcal{F}(X)$ de todas as funções de X em $\mathbb{C}$ para a qual uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja pontualmente convergente para uma função f (i. e. tal que, para cada $x \in X$, $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x)$) se e só se $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$.

Exemplo 2.3.2 Seja X um conjunto e considere-se uma família $(E_x)_{x\in X}$ de espaços topológicos onde cada E_x ($x \in X$) é igual a $\mathbb{C}$ (munido da topologia usual). Um elemento de $\prod_{x\in X} E_x$ não é então mais do que uma função de X em $\mathbb{C}$ e a topologia produto é, neste caso, uma topologia definida no conjunto $\mathcal{F}(X)$ das funções de I em $\mathbb{C}$. A proposição anterior afirma que uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de X em $\mathbb{C}$ converge para uma função $f\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ (relativamente àquela topologia) se e só convergir pontualmente para f. Logo, em $\mathcal{F}(X)$ munido desta topologia a convergência é o mesmo que convergência pontual. Por este motivo, esta topologia designa-se por «topologia da convergência pontual».

Repare-se que a topologia do exemplo anterior não é metrizável se X for um conjunto infinito não numerável, pois $\prod_{x\in X} E_x$ munido daquela topologia nem sequer é 1-numerável.[5]

2.4 Espaços conexos

Vai-se introduzir o conceito de espaço topológico conexo. A ideia que está subjacente é fácil de perceber: um espaço topológico é conexo se estiver todo num só bocado; caso contrário é desconexo.

Definição 2.4.1 Seja E um espaço topológico. Diz-se que E é *conexo* se os únicos sub-conjuntos de E simultaneamente abertos e fechados forem E e $\emptyset$. Caso contrário, diz-se que E é *desconexo*.

Exemplo 2.4.1 É claro que um espaço topológico grosseiro é conexo e que um espaço topológico discreto com mais do que um ponto é desconexo.

[5] Mais geralmente, se X for um conjunto infinito não numerável e se, para cada $x \in X$, E_x tiver algum aberto distinto de $\emptyset$ e de E_x, então $\prod_{x\in X} E_x$ não é 1-numerável. Também se pode mostrar que se X for numerável e se cada E_x for metrizável, então $\prod_{x\in X} E_x$ é metrizável.

Exemplo 2.4.2 Os sub-espaços topológicos conexos de $\mathbb{R}$ (relativamente à topologia usual) são os intervalos.[6] De facto, seja I um intervalo não vazio de $\mathbb{R}$ e seja $A \subset I$ uma parte não vazia de I que seja simultaneamente aberta e fechada em I; vai-se mostrar que $A = I$. Fixe-se $a \in A$ e seja $b \in I$; quer-se provar que $b \in A$. Vai-se supor que $a < b$; o caso em que $a > b$ é análogo. Seja $s = \sup A \cap [a, b]$; visto que A é um fechado de I e $[a, b] \subset I$, $A \cap [a, b]$ é um fechado de $[a, b]$, pelo que $s \in A \cap [a, b]$ e, em particular, $s \in A$. Se se tivesse $s < b$, então ter-se-ia $s = \inf(I \setminus A) \cap [s, b]$; como $I \setminus A$ é um fechado de I, $(I \setminus A) \cap [s, b]$ é um fechado de $[s, b]$, pelo que $s \in (I \setminus A) \cap [s, b]$ e, em particular, $s \in I \setminus A$, o que é absurdo. Logo, $s = b$ e, visto que $s \in A$, $b \in A$.

Reciprocamente, se $A \subset \mathbb{R}$ não for um intervalo, então existem a_1 e a_2 em A e existe algum $x \in \mathbb{R} \setminus A$ tais que $a_1 < x < a_2$. Logo, $A \cap]-\infty, x[$ é um aberto de A que não é vazio (pois contém a_1) nem igual a A (pois não contém a_2). Consequentemente, A é desconexo.

É importante observar que a noção de «sub-espaço conexo» é absoluta e não relativa.

A fim de demonstrar resultados relativos a espaços topológicos conexos, é conveniente dispor-se do seguinte resultado:

Lema 2.4.1
Considere-se em $\{0, 1\}$ a topologia usual. Um espaço topológico E é conexo se e só se nenhuma função contínua de E em $\{0, 1\}$ for sobrejectiva.

Demonstração: Se existir uma função $f \colon E \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejectiva, então o conjunto $f^{-1}(\{0\})$ é aberto (pois $\{0\}$ é um aberto de $\{0, 1\}$), fechado (pois $\{0\}$ é um fechado de $\{0, 1\}$), distinto de E (pois afirmar que $f^{-1}(\{0\}) = E$ é afirmar que f toma sempre o valor 0) e distinto de $\emptyset$ (pois afirmar que $f^{-1}(\{0\}) = E$ é afirmar que f toma sempre o valor 1).

Reciprocamente, se E for desconexo então seja A uma parte de E simultaneamente aberta, fechada, distinta de E e distinta de $\emptyset$. Então a função

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

é contínua e sobrejectiva. ■

[6] Convém ser-se claro quanto ao significado deste termo. Um *intervalo* de $\mathbb{R}$ é um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ tal que, se $a, b, c \in \mathbb{R}$ forem tais que $a < b < c$ e que $a, c \in I$, então $b \in I$.

Proposição 2.4.1
Sejam E_1 *e* E_2 *espaços topológicos e* $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *uma função contínua. Se* E_1 *for conexo, então* $f(E_1)$ *é um sub-espaço conexo de* E_2*.*

Demonstração: Se $g\colon f(E_1) \longrightarrow \{0, 1\}$ for uma função contínua, quer-se mostrar que não é sobrejectiva. Para tal, basta ver que se g fosse sobrejectiva então $g \circ f$ também o seria, pelo que E_1 seria desconexo.■

Veja-se que esta proposição é uma generalização do teorema dos valores intermédios. De facto, este teorema pode ser enunciado do seguinte modo: se I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(I)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. Mas, pelo exemplo 2.4.2, os intervalos de $\mathbb{R}$ são os sub-espaços conexos de $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.3 A circunferência unitária S^1 é conexa pois função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \rightsquigarrow & (\cos(x), \operatorname{sen}(x)) \end{array}$$

é contínua e, como $\mathbb{R}$ é conexo, a imagem de f (que é S^1) é conexa.

Proposição 2.4.2
Sejam E *um espaço topológico e* $B, C \subset E$*. Se* C *for um sub-espaço topológico conexo de* E *e se* $C \subset B \subset \overline{C}$*, então* B *é conexo.*

Demonstração: Para se demonstrar esta proposição, vai-se aplicar o corolário 2.2.1 ao sub-espaço topológico B de E e ao conjunto $C \subset B$. Veja-se que, em B, $\overline{C} = B$. De facto, se F for um fechado de B que contém C, então $F = F^* \cap B$ para algum fechado F^* de E. Mas, uma vez que F^* é um fechado de E e que $C \subset F \subset F^*$, $\overline{C} \subset F^*$; em particular, $B \subset F^*$, pelo que, em B, o único fechado que contém C é B, i. e. em B tem-se $\overline{C} = B$.

Se $f\colon B \longrightarrow \{0, 1\}$ for contínua, então, pelo corolário 2.2.1,

$$f(B) = f\left(\overline{C}\right) \subset \overline{f(C)}. \tag{2.3}$$

Mas, uma vez que C é conexo, $f(C) = \{0\}$ ou $f(C) = \{1\}$. Em qualquer dos casos $\overline{f(C)}$ é um conjunto formado por um único ponto. Deduz-se então de (2.3) que f não é sobrejectiva. ■

Proposição 2.4.3
Sejam E *um espaço topológico e* $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família de sub-espaços conexos de* E*. Se* $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$*, então* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ *é um sub-espaço conexo de* E*.*

Demonstração: Seja $f\colon \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \longrightarrow \{0,1\}$ uma função contínua e seja $a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$. Então, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f(C_\lambda) = \{f(a)\}$, pois C_λ é conexo. Como isto acontece para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda\right) = \{f(a)\}.$$

■

Isto mostra que, por exemplo, o conjunto dos pontos do plano que se situam em alguma recta que passa pela origem e por algum outro ponto com ambas as coordenadas inteiras forma um sub-espaço conexo de $\mathbb{R}^2$, pois cada uma daquelas rectas é conexa (por ser homeomorfa a $\mathbb{R}$) e a origem pertence à intersecção.

Teorema 2.4.1
Seja $(E_i)_{i\in I}$ *uma família de espaços topológicos não vazios. Então* $\prod_{i\in I} E_i$ *é conexo se e só se cada* E_i *for conexo.*

Demonstração: Se $\prod_{i\in I} E_i$ for conexo e se $j \in I$, então, uma vez que a projecção $\pi_j\colon \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ é contínua e sobrejectiva, E_j é conexo, pela proposição 2.4.1.

Reciprocamente, se cada E_i for conexo, seja $f\colon \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow \{0,1\}$ uma função contínua. Quer-se mostrar que f é constante. Fixe-se $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$.

Para cada $j \in I$, considere-se a função $\iota_j\colon E_j \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i$ assim definida: se $a \in E_j$, então $\iota_j(a) = (x_i)_{i\in I}$, onde $x_j = a$ e, se $i \in I \setminus \{j\}$, $x_i = a_i$. Então $f \circ \iota_j\colon E_j \longrightarrow \{0,1\}$ é uma função contínua. Como E_j é conexo, trata-se de uma função constante e toma então sempre o valor $f\big(\iota_j(a_j)\big) = f\big((a_i)_{i\in I}\big)$. Logo, se $(x_i)_{i\in I}$ diferir de $(a_i)_{i\in I}$ num único índice tem-se $f\big((x_i)_{i\in I}\big) = f\big((a_i)_{i\in I}\big)$.

Seja D o conjunto dos elementos $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ tais que $x_i = a_i$ excepto eventualmente num número finito de pontos. A partir do que foi visto atrás pode-se mostrar por indução que $f|_D$ é constante. Mas D é denso em $\prod_{i\in I} E_i$, pois se $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ e V é vizinhança de $(y_i)_{i\in I}$, então V contém algum aberto da forma $\prod_{i\in I} A_i$ onde cada A_i é um aberto de E_i que contém y_i e existe algum conjunto finito $F \subset I$ tal que $A_i = E_i$ se $i \in I \setminus F$. Mas então se definir $(x_i)_{i\in I}$ por

$$x_i = \begin{cases} y_i & \text{se } i \in F \\ a_i & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então $(x_i)_{i\in I} \in D \cap \prod_{i\in I} A_i \subset D \cap V$.

Finalmente, como f é contínua e $f|_D$ é constante, decorre do corolário 2.2.1 que $f|_{\overline{D}}$ é constante, ou seja, que f é constante. ∎

Exemplo 2.4.4 Por exemplo, considere-se o plano projectivo $P_2(\mathbb{R})$ e a função

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow P_2(\mathbb{R}) \\ (x, y) &\rightsquigarrow \pi(x, y, 1). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^2$ é conexo (pois, conforme foi visto no exemplo 2.3.1, a topologia usual em $\mathbb{R}^2$ coincide com a topologia produto) e a função f é contínua, $f(\mathbb{R}^2)$ é um sub-espaço conexo de $P_2(\mathbb{R})$, pela proposição 2.4.1. Uma vez que foi visto no exemplo 2.2.21 que $f(\mathbb{R}^2)$ é uma parte densa de $P_2(\mathbb{R})$, deduz-se da proposição 2.4.2 que o plano projectivo é conexo.

No início desta secção, na página 99, foi dito que a ideia subjacente ao conceito de espaço topológico conexo é que o espaço está todo num só bocado. Vai-se agora formalizar o que se entende aqui por «bocado».

Definição 2.4.2 Se E é um espaço topológico e $x \in E$, a *componente conexa* de x é a reunião de todas as partes conexas de E que contêm x.

Exemplo 2.4.5 Num espaço topológico conexo, a componente conexa de qualquer ponto é o espaço todo.

Exemplo 2.4.6 Se se considerar em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a topologia usual, então a componente conexa de $1/2$ é o intervalo $]0, 1[$. De facto, um sub-espaço conexo de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ que contenha $1/2$ só pode ser um intervalo contido em $]0, 1[$ que contenha $1/2$. A reunião de todos estes intervalos é $]0, 1[$.

Deduz-se da proposição 2.4.3 que a componente conexa de um ponto é um conexo e deduz-se da proposição 2.4.2 que é um fechado.

Definição 2.4.3 Diz-se que um espaço topológico E é *totalmente desconexo* se tiver mais do que um ponto e se a componente conexa de cada $x \in E$ for o conjunto $\{x\}$.

Exemplo 2.4.7 Qualquer espaço topológico discreto com mais do que um ponto é totalmente desconexo.

Exemplo 2.4.8 Um sub-espaço de $\mathbb{R}$ com mais do que um ponto é totalmente desconexo se e só não contiver intervalos com mais do que um ponto. Em particular, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são totalmente desconexos. Além disso, foi visto na página 49 que o conjunto de Cantor não contém intervalos com mais do que um ponto, pelo que também é totalmente desconexo.

Definição 2.4.4 Seja E um espaço topológico. Designa-se por *caminho* (ou *arco*) uma função contínua $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow E$. Se $a = \gamma(0)$ e se $b = \gamma(1)$, diz-se que o caminho γ une o ponto a ao ponto b. A imagem de γ designa-se por *traço* de γ. Diz-se que o espaço topológico E é *conexo por arcos* se, dados dois pontos $a, b \in E$, existir um caminho em E que una o ponto a ao ponto b.

Exemplo 2.4.9 Qualquer sub-espaço convexo C de um espaço vectorial normado é conexo por arcos. Se $a, b \in C$, basta considerar o caminho

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & C \\ t & \rightsquigarrow & a + t(b-a). \end{array}$$

Por outro lado, observe-se que se E for um espaço topológico e se se definir em E a relação binária

$$a\,\mathcal{C}\,b \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \text{existe um caminho em } E \text{ que une } a \text{ a } b$$

então $\mathcal{C}$ é mesmo uma relação de equivalência:

reflexividade: se $a \in E$, basta considerar a função $f\colon [0,1] \longrightarrow E$ que toma sempre o valor a;

simetria: se $f\colon [0,1] \longrightarrow E$ é um caminho em E que une um ponto a a um ponto b, então

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \\ t & \rightsquigarrow & f(1-t) \end{array}$$

é um caminho em E que une b a a;

transitividade: se $f_1\colon [0,1] \longrightarrow E$ é um caminho em E que une um ponto a a um ponto b e se $f_2\colon [0,1] \longrightarrow E$ é um caminho em E que une o ponto b a um ponto c, então

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \\ t & \rightsquigarrow & \begin{cases} f_1(2t) & \text{se } t \leqslant 1/2 \\ f_2(2t-1) & \text{caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

é um caminho em E que une o ponto a ao ponto c.

Consequentemente, para que um espaço topológico E seja conexo por arcos basta que exista um ponto $p \in E$ que possa ser unido a qualquer outro ponto de E por um caminho.

As classes de equivalência de $\mathcal{C}$ designam-se por *componentes conexas por arcos* do espaço topológico E.

Proposição 2.4.4
Qualquer espaço topológico conexo por arcos é conexo.

Demonstração: Seja E o espaço topológico em questão, que se pode supor não vazio. Fixe-se $p \in E$ e seja, para cada $q \in E$, γ_q um caminho que una o ponto p ao ponto q. Então E é a reunião dos traços de todos os γ_q, os quais são conexos, pela proposição 2.4.1. Além disso, o ponto p pertence ao traço de todos os caminhos γ_q, pelo que E é conexo, pela proposição 2.4.3. ■

Foi visto no exemplo 2.4.4 que o plano projectivo é conexo. Pode-se chegar à mesma conclusão mostrando que $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é conexo por arcos e, consequentemente, conexo. Em seguida basta observar que a função $\pi\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ é contínua e sobrejectiva e aplicar a proposição 2.4.1.

2.5 Espaços compactos

2.5.1 Caso geral

Vai-se agora introduzir o conceito de espaço topológico compacto. Em grande medida, os espaços topológicos compactos estão para os espaços topológicos em geral tal como os conjuntos finitos estão para os conjuntos em geral. Por exemplo:

- qualquer parte finita de um espaço métrico é limitada e, como iremos ver na página 108, qualquer sub-espaço compacto de um espaço métrico é limitado;
- qualquer parte finita de $\mathbb{R}$ tem máximo e mínimo e qualquer sub--espaço compacto de $\mathbb{R}$ (munido da topologia usual) tem máximo e mínimo;
- a reunião de um número finito de partes finitas de um conjunto X é uma parte finita de X e a reunião de um número finito de sub--espaços compactos de um espaço topológico E é um sub-espaço compacto de E.

Esta analogia também se prolonga às funções: até certo ponto, os espaços topológicos compactos e as funções contínuas estão para os espaços topológicos em geral tal como os conjuntos finitos e as funções estão para os conjuntos em geral. Por exemplo, a imagem de um conjunto finito por uma função é um conjunto finito e a imagem de um espaço topológico compacto por uma função contínua é um espaço topológico compacto (proposição 2.5.3). Convém manter em mente que esta analogia tem limites. Por exemplo *não* é verdade que qualquer sub-espaço de um espaço topológico compacto seja compacto, embora seja verdade que qualquer sub-conjunto de um conjunto finito é finito.

Definição 2.5.1 Seja E um espaço topológico. Diz-se que uma família $(A_j)_{j\in I}$ de partes de E é uma *cobertura* de E se $E = \bigcup_{j\in I} A_j$; uma tal cobertura diz-se *aberta* (respectivamente *finita*) se, para cada $j \in I$, A_j for um aberto (resp. se I for finito). As subfamílias de uma cobertura que sejam coberturas designam-se por *sub-coberturas*. Diz-se que E é *compacto* se qualquer cobertura aberta de E possuir uma sub-cobertura finita.

Exemplo 2.5.1 Qualquer espaço topológico finito E é compacto. Com efeito, se $(A_j)_{j\in I}$ for uma cobertura aberta de E então, para cada $x \in E$, existe algum $j(x) \in I$ tal que $x \in A_{j(x)}$. Logo, $(A_{j(x)})_{x\in E}$ é uma sub-cobertura finita de $(A_j)_{j\in I}$.

Exemplo 2.5.2 Um espaço topológico discreto E só pode ser compacto se for finito, uma vez que a cobertura aberta $\{\{x\} \mid x \in E\}$ não possui nenhuma sub-cobertura além dela própria.

Exemplo 2.5.3 O espaço topológico $\mathbb{R}$, munido da topologia usual, não é compacto. Basta ver que a cobertura aberta $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem qualquer sub-cobertura finita.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Heine-Borel)
Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então $[a, b]$, munido da topologia usual, é compacto.

Demonstração: Seja $(A_j)_{j\in I}$ uma cobertura aberta de $[a, b]$ e seja

$$S = \left\{ x \in [a, b] \;\middle|\; (\exists F \subset I) : F \text{ é finito} \wedge [a, x] \subset \bigcup_{j\in F} A_j \right\}.$$

Afirmar que $[a, b]$ é compacto é afirmar que $b \in S$. Para se ver que isso é verdade comece-se por ver que, visto que $a \in A_j$, para algum $j \in I$, e que A_j é um aberto de $[a, b]$, A_j contém algum intervalo $[a, x]$, com $a < x \leqslant b$ e, pela definição de S, $[a, x[\subset S$. Em particular, S não é vazio e, como S é majorado por b, faz sentido considerar o número $s = \sup S$. A fim de demonstrar que $b \in S$, vai-se provar que

1. $s \in S$;
2. $b = s$.

Para demonstrar que $s \in S$, veja-se que $s \in A_{j_0}$, para algum $j_0 \in I$. Seja $x \in A_{j_0}$ tal que $x < s$. Como $s = \sup S$, existe algum $y \in S$ tal que $x \leqslant y \leqslant s$. Pela definição de S, existem $j_1, j_2, \ldots, j_n \in I$ tais que

$$[a, y] \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{j_k},$$

pelo que

$$[a, s] = [a, y] \cup [y, s] \subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_{j_k}\right) \cup A_{j_0} = \bigcup_{k=0}^{n} A_{j_k}. \tag{2.4}$$

Está então provado que $s \in S$. Finalmente, se se tivesse $s < b$, então poder-se-ia tomar $z \in]s, b]$ tal que $z \in A_{j_0}$. Mas então (2.4) permaneceria válido com s substituído por z, pelo que $z \in S$. Isto é impossível, pois $z > s = \sup S$. ■

É visto nos cursos de Análise Real de funções de várias variáveis (e será demonstrado mais à frente; veja-se o corolário 2.5.5) que um sub-espaço K de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se K for fechado e limitado. É importante observar que isto não é verdade em geral em espaços topológicos, por três motivos.

1. Um sub-espaço topológico K de um espaço topológico E pode ser compacto sem que K seja um fechado de E. Por exemplo, se em $\mathbb{R}$ se considerar a topologia grosseira ou a topologia dos complementares finitos (definida no exemplo 2.2.9), então qualquer sub-espaço de $\mathbb{R}$ é compacto, independentemente de ser ou não um fechado de $\mathbb{R}$.

2. Conforme foi mencionado na página 92, a noção de «conjunto limitado» é métrica e não topológica. Consequentemente, o enunciado só faz sentido em espaços métricos.

3. Mesmo em espaços métricos o enunciado é falso. Basta considerar, por exemplo, $\mathbb{R}$ munido da métrica discreta. Então $\mathbb{R}$ é uma parte fechada e limitada daquele espaço, mas não é um compacto.

No entanto, como já foi mencionado na página 105, se um sub-espaço K de um espaço métrico (E, d) for compacto, então K é um sub-conjunto limitado de E. Basta ver que, se $x \in E$, então $\{ B(x, r) \cap K \mid r \in \mathbb{R}_+^* \}$ é uma cobertura aberta de E. Logo, existem $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $E \subset \bigcup_{k=1}^n B(x, r_k) \cap E$ pelo que, se $r = \max\{ r_k \mid k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, $E \subset B(x, r)$.

Observe-se que a noção de «sub-espaço compacto» é absoluta e não relativa. Por outro lado, se E é um espaço topológico, K é um sub-espaço de E e $(A_j)_{j \in I}$ é uma cobertura aberta de E, então cada A_j é da forma $U_j \cap K$ onde U_j é um aberto de E. Tem-se então $K \subset \bigcup_{j \in I} U_j$ e, se $F \subset I$, então $(A_j)_{j \in F}$ é uma sub-cobertura de $(A_j)_{j \in I}$ se e só se $K \subset \bigcup_{j \in I} U_j$. Vê-se então que o sub-espaço K é compacto se e só se, dada uma família $(U_j)_{j \in I}$ de abertos de E cuja reunião contenha K, existe uma sub-família finita com a mesma propriedade.

Se E é um espaço topológico e $K \subset E$, é frequente empregar a expressão «K é um compacto de E» para dizer que o sub-espaço K é compacto.

Proposição 2.5.1
Se F for um fechado de um espaço topológico compacto K, então F é compacto.

Demonstração: Seja $(A_j)_{j \in I}$ uma família de abertos de K cuja reunião contenha F. Então $K = F^\complement \cup \bigcup_{j \in I} A_j$. Como $F^\complement$ é um aberto de K bem como cada A_j $(j \in I)$, o conjunto $\left\{F^\complement\right\} \cup \{ A_j \mid j \in I\}$ é uma cobertura aberta de K. Uma vez que K é compacto, existe alguma parte finita Φ de I tal que $K = F^\complement \cup \bigcup_{j \in \Phi} A_j$ e, portanto, $F \subset \bigcup_{j \in \Phi} A_j$. ∎

Conforme já foi observado na página precedente, um sub-espaço K de um espaço topológico E pode ser compacto mesmo sem que K seja um fechado de E. No entanto, a próxima proposição mostra que isto só pode ter lugar se E não for separado.

Proposição 2.5.2
Sejam E um espaço topológico separado e K um compacto de E. Então K é um fechado de E.

Demonstração: Vai-se mostrar que $K^\complement$ é um aberto de E. Seja então $x \in K^\complement$. Como E é separado, para cada $k \in K$ existem vizinhanças V_k e U_k de k e de x respectivamente tais que $V_k \cap U_k = \emptyset$. Para cada $k \in K$, V_k contém um aberto A_k que contém k. Mas então $(A_k)_{k \in K}$ é uma família de abertos de E que contém K, pelo que existe algum conjunto finito $F \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{k \in F} A_k$. Mas por um lado $\bigcup_{k \in F} A_k$

não intersecta $\bigcap_{k\in F} V_k$ e, por outro lado, este último conjunto é uma vizinhança de x. Em particular, existe uma vizinhança de x que não intersecta K, pelo que $K^{\complement}$ é vizinhança de x. Como isto tem lugar para cada $x \in K^{\complement}$, este conjunto é aberto. ∎

Proposição 2.5.3
Sejam E_1 *e* E_2 *espaços topológicos,* $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *uma função contínua e* K *um sub-espaço compacto de* E_1*. Então* $f(K)$ *é um sub-espaço compacto de* E_2*.*

Demonstração: Seja $(A_j)_{j\in I}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. A família $\left(f^{-1}(A_j)\right)_{j\in I}$ é então uma cobertura aberta de K, pelo que, para algum sub-conjunto finito F de I, $K \subset \bigcup_{j\in F} f^{-1}(A_j)$, ou seja, $f(K) \subset \bigcup_{j\in F} A_j$. ∎

Corolário 2.5.1
Sejam E_1 *e* E_2 *espaços topológicos e* $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ *uma bijecção contínua. Se* E_1 *for compacto e* E_2 *for separado, então* f *é um homeomorfismo.*

Demonstração: Para mostrar que f é um homeomorfismo basta mostrar que f^{-1} é contínua e isto equivale, pelo teorema 2.2.2, a mostrar que se F é um fechado de E_1 então $f(F)$ é um fechado de E_2. Mas se F é um fechado de E_1 então F é compacto, pela proposição 2.5.1. Logo, $f(F)$ é um compacto, pela proposição anterior. Deduz-se então da proposição 2.5.2 que $f(F)$ é um fechado. ∎

Corolário 2.5.2
Se K *for um espaço topológico compacto e* $f\colon K \longrightarrow \mathbb{C}$ *for contínua, então* f *é limitada. Além disso, se* f *for uma função real, então tem máximo e mínimo.*

Demonstração: Pela proposição 2.5.3 a imagem de f é compacta; logo é fechada e limitada. Caso a imagem de f esteja contida em $\mathbb{R}$ então, sendo limitada, tem supremo e ínfimo (em $\mathbb{R}$). Como o supremo e o ínfimo de f são limites de sucessões de elementos da imagem de f e esta é fechada, o supremo e o ínfimo pertencem à imagem, i. e. f tem máximo e mínimo. ∎

Seja I um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Obviamente, o corolário anterior é uma generalização do teorema que afirma que se $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f tem máximo e mínimo, que já foi empregue duas vezes (no exemplo 1.3.7 e na demonstração do teorema da aproximação de Weierstrass).

Proposição 2.5.4
Se K for um espaço topológico, são condições equivalentes:

1. K *é compacto;*
2. *se $\mathcal{F}$ for uma família de partes não vazias de K tal que a intersecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ contém algum elemento de $\mathcal{F}$, então existe algum ponto de K que adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.*

Demonstração: Verifica-se facilmente que cada uma das condições abaixo enunciadas equivale à seguinte:

1. o espaço topológico K é compacto;
2. se $\mathcal{A}$ for uma família de abertos de K cuja reunião é igual a K, então existe uma parte finita de $\mathcal{A}$ com a mesma propriedade;
3. se $\mathcal{A}$ for uma família de abertos de K estável para reuniões finitas e cuja reunião é igual a K, então existe uma parte finita de $\mathcal{A}$ com a mesma propriedade;
4. se $\mathcal{F}$ for uma família de fechados de K estável para intersecções finitas e cuja intersecção é vazia, então existe uma parte finita de $\mathcal{A}$ com a mesma propriedade;
5. se $\mathcal{F}$ for uma família de fechados não vazios de K que é estável para intersecções finitas, então a intersecção de todos os elementos de $\mathcal{F}$ não é vazia;
6. se $\mathcal{F}$ for uma família de partes não vazias de K que é estável para a intersecções finitas, então existe algum ponto de K que adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$;
7. se $\mathcal{F}$ for uma família de partes não vazias de K tal que a intersecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ contém algum elemento de $\mathcal{F}$, então existe algum ponto de K que adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Como estas condições são equivalentes, então, em particular, a última condição equivale à primeira. ∎

Vejamos um exemplo de uma família $\mathcal{F}$ que satisfaz a condição da proposição anterior. Seja E um espaço topológico, seja $K \subset E$, seja $x \in \overline{K}$ e seja $\mathcal{F} = \{ V \cap K \mid V \text{ é vizinhança de } x \}$. Então $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (pois, uma vez que $x \in \overline{K}$, todas as vizinhanças de x intersectam K) e a intersecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ é novamente um elemento de $\mathcal{F}$ (pois a intersecção de um número finito de vizinhanças de x é novamente uma vizinhança de x) e, em particular, contém um elemento de $\mathcal{F}$. Logo, se K for um sub-espaço compacto de E, existe algum $k \in K$ que adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$, pelo que qualquer vizinhança de K intersecta qualquer vizinhança de x. Em particular, se E for separado, então $x = k \in K$. Como isto foi provado para qualquer $k \in K$, $\overline{K} \subset K$, ou seja, K é um fechado de E. Está então feita uma nova demonstração da proposição 2.5.2.

Corolário 2.5.3
Se K for um espaço topológico compacto e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão decrescente de fechados não vazios de E, então a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ não é vazia.

Demonstração: Se $\mathcal{F} = \{\, F_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, então $\mathcal{F}$ satisfaz as condições da segunda alínea da proposição 2.5.4, pelo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n} \neq \emptyset$. Como cada F_n é fechado, isto é o mesmo que dizer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. ■

Decorre imediatamente deste corolário e da definição de ponto aderente de uma sucessão que se tem:

Corolário 2.5.4
Se K for um espaço topológico compacto, qualquer sucessão de elementos de K tem pontos aderentes.

Em particular, se K for compacto e 1-numerável, deduz-se da proposição 2.2.10 que qualquer sucessão de elementos de K tem sub-sucessões convergentes.

Exemplo 2.5.4 Considere-se o espaço $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ munido da métrica do supremo. Vai-se usar o corolário anterior para mostrar que $B'(0,1)$ (onde 0 é a função nula) não é um sub-espaço compacto.[7] Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\begin{aligned} f_n\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [n, n+1] \\ 2x - 2n & \text{se } x \in]n, n + 1/2] \\ 2n + 2 - 2x & \text{se } x \in [n + 1/2, n+1[\end{cases} \end{aligned}$$

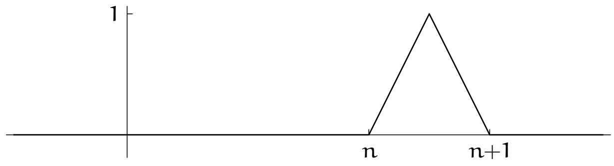

Figura 2.5: Gráfico de f_n

(o seu gráfico está representado na figura 2.5). Então a distância entre dois pontos distintos da sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é igual a 1, pelo que nenhuma sub-sucessão de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Uma consequência do corolário 2.5.4 é um teorema clássico de Análise Real.

Teorema 2.5.2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)
Em relação à topologia usual de $\mathbb{R}$*, qualquer sucessão limitada tem alguma sub-sucessão convergente.*

Demonstração: Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão limitada de números reais, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \in [a, b]$. Como, pelo teorema de Heine-Borel, $[a, b]$ é compacto, o corolário 2.5.4 garante que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem alguma sub-sucessão convergente. ■

Este teorema pode ser demonstrado sem se recorrer ao teorema de Heine-Borel. Para tal, basta provar que:

1. qualquer sucessão real tem alguma sub-sucessão monótona;
2. qualquer sucessão real monótona é convergente.

A primeira destas afirmações pode ser demonstrada observando que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão real e se

$$C = \{\, n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \in \mathbb{N}) : m \geqslant n \Longrightarrow x_m \leqslant x_n \,\},$$

há duas possibilidades.

C é finito: Então, se $n_1 \in \mathbb{N}$ for maior do que qualquer elemento de C existe, uma vez que $n_1 \notin C$, existe algum $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$ e que $x_{n_2} > x_{n_1}$. Aplicando o mesmo argumento a n_2 resulta que existe algum $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_3 > n_2$ e que $x_{n_3} > x_{n_2}$ e assim sucessivamente. Logo, a sucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente.

[7]Repare-se que isto fornece outro exemplo de um sub-espaço não compacto F de um espaço métrico sendo F fechado e limitado.

C é infinito: Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, n_k for o k-ésimo elemento de C, então, pela definição de C, a sucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

Quanto à segunda afirmação, basta ver que se uma sucessão real monótona for crescente (respectivamente), então converge para o seu supremo (resp. ínfimo).

2.5.2 Produtos de espaços compactos

Vai-se demonstrar que, dada uma família de espaços topológicos não vazios, o seu produto cartesiano é compacto se e só se cada um dos espaços for compacto.[8] A demonstração vai empregar um resultado de Teoria dos Conjuntos.

Definição 2.5.2 Se X for um conjunto e se C for um conjunto de partes de X, diz-se que C está *totalmente ordenado* relativamente à inclusão se, para quaisquer $A, B \in C$, $A \subset B$ ou $B \subset A$.

O conjunto das partes finitas de $\mathbb{N}$ não está totalmente ordenado por inclusão pois, por exemplo, não se tem $\{1\} \subset \{2\}$ nem se tem $\{2\} \subset \{1\}$. Em contrapartida, o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ da forma $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) está totalmente ordenado por inclusão.

Demonstra-se facilmente que, nas condições da definição anterior, se C estiver totalmente ordenado por inclusão e se $A_1, \ldots, A_n \in C$ ($n \in \mathbb{N}$), então existem $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}) : A_j \subset A_i \subset A_k$. Posto de outro modo, qualquer parte finita de uma família de conjuntos totalmente ordenada por inclusão tem algum elemento que contém todos os outros e algum elemento que está contido em todos os outros.

Definição 2.5.3 Se X for um conjunto e se C for um conjunto de partes de X, diz-se que um elemento M de C é *maximal* se

$$(\forall N \in C) : M \subset N \Longrightarrow M = N.$$

Um conjunto de partes de um conjunto pode ter exactamente um elemento maximal, pode ter mais do que um ou pode não ter nenhum. Vejamos um exemplo de cada uma destas situações. Em cada caso, E é um espaço topológico e P é uma parte de E.

[8]Não se está a supor qualquer limitação quanto ao cardinal da família em questão; mesmo que seja infinita, o produto cartesiano é compacto. Isto é outro exemplo de como a analogia feita nas páginas 105–106 entre espaços topológicos compactos e conjuntos finitos tem limites

Exemplo 2.5.5 Se $\mathcal{C} = \{ A \subset P \mid A \text{ é aberto} \}$, então $\mathcal{C}$ tem um e um só elemento maximal, nomeadamente o interior de P.

Exemplo 2.5.6 Se $\mathcal{C} = \{ F \subset P \mid F \text{ é fechado} \}$, então, em geral, $\mathcal{C}$ não tem qualquer elemento maximal. De facto, se E for tal que, para cada $x \in E$, $\{x\}$ seja um fechado de E, então $\mathcal{C}$ tem um elemento maximal se e só se P for um fechado de E (e neste caso, $\mathcal{C}$ tem exactamente um elemento maximal, que é o próprio P). Nos restantes casos, se F fosse um elemento maximal de P então, visto que P não é fechado, existiria algum $x \in P \setminus F$, pelo que $F \cup \{x\}$ seria um elemento de $\mathcal{C}$ e $F \cup \{x\} \supsetneq F$, o que contradiz a maximalidade de F.

Exemplo 2.5.7 Se $\mathcal{C} = \{ X \subset P \mid X \text{ é conexo} \}$ então, em geral, $\mathcal{C}$ tem diversos elementos maximais. São as componentes conexas de P.

Seja X um conjunto, seja $\mathcal{C}$ um conjunto de partes de X e seja $\mathcal{B}$ uma parte de $\mathcal{C}$ que seja totalmente ordenada por inclusão. Em geral, há várias partes de $\mathcal{C}$ totalmente ordenadas por inclusão que contêm $\mathcal{B}$. Alguma delas terá que ser maximal? A resposta é afirmativa.

Teorema 2.5.3 (Princípio da maximalidade de Haudorff)
Se X for um conjunto, se $\mathcal{C}$ for um conjunto de partes de X e se $\mathcal{A}$ for uma parte de $\mathcal{C}$ totalmente ordenada relativamente à inclusão, então existe alguma parte $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ que contém $\mathcal{A}$, que é totalmente ordenada relativamente à inclusão e que é maximal relativamente a estas propriedades.

Vejamos uma consequência deste princípio. Se X e $\mathcal{C}$ estiveram nas condições do enunciado e se $A \in \mathcal{C}$, então o conjunto $\{A\}$ é, trivialmente, uma parte de $\mathcal{C}$ totalmente ordenada por inclusão. Logo, existe alguma parte $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{C}$ totalmente ordenada por inclusão tal que $A \in \mathcal{B}^*$ e que $\mathcal{B}^*$ é maximal dentro das partes de $\mathcal{C}$ totalmente ordenadas por inclusão às quais A pertence. Seja B a reunião de todos os elementos de $\mathcal{B}^*$ e suponha-se que $B \in \mathcal{C}$. Então $A \subset B$ e B é maximal dentro do conjunto dos elementos de $\mathcal{C}$ que contêm A. Com efeito, se assim não fosse, isto é, se houvese algum $B' \in \mathcal{C}$ tal que $A \in B'$ e que $B' \supsetneq B$, então $\mathcal{B}^* \cup \{B'\}$ seria uma parte de $\mathcal{C}$ totalmente ordenada por inclusão que conteria estritamente $\mathcal{B}^*$, o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{B}^*$.

Teorema 2.5.4 (Teorema de Tychonoff)
Se $(E_i)_{i \in I}$ for uma família de espaços topológicos não vazios, $\prod_{i \in I} E_i$ é compacto se e só se cada E_i for compacto.

Demonstração: No decorrer desta demonstração, vai-se representar $\prod_{i\in I} E_i$ por E.

Se E for compacto então, visto que nenhum E_i é vazio, cada projecção $p_j \colon E \longrightarrow E_j$ ($j \in I$) é sobrejectiva. Logo, E_j é compacto, pela proposição 2.5.3.

Suponha-se agora que $(E_i)_{i\in I}$ é uma família de espaços topológicos compactos. Quer-se provar que E é compacto, o que será feito recorrendo à proposição 2.5.4. Mais precisamente, vai-se supor que $\mathcal{F}$ é uma família de partes não vazias de E tal que a intersecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ contém algum elemento de $\mathcal{F}$ e provar que existe algum ponto $(a_i)_{i\in I} \in E$ que adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$. Para simplificar a exposição, vai-se designar por «condição C» a condição de, dada uma família $\mathcal{F}$ de partes de um conjunto X, cada elemento de $\mathcal{F}$ não ser vazio e a intersecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ conter algum elemento de $\mathcal{F}$.

Comece-se por supor que $\mathcal{F}$ é maximal relativamente à condição C. Então, se $X \subset E$ for tal que X intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$. Com efeito, se assim não fosse, a família

$$\mathcal{F}^* = \{\, A \subset E \mid (\exists F \in \mathcal{F}) : A \supset F \cap X \,\}$$

satisfaria a condição C e, além disso, $\mathcal{F}^*$ conteria estritamente $\mathcal{F}$ (pois $X \in \mathcal{F}^* \setminus \mathcal{F}$), o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{F}$. Resulta deste facto que a intersecção de quaisquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$, pois se $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então, pela condição C, $\bigcap_{i=1}^n F_i$ intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}$, pelo que também pertence a $\mathcal{F}$. Se, para cada $j \in I$, π_j for a projecção de E sobre E_j, então o conjunto $\mathcal{F}_j = \{\, \pi_j(F) \mid F \in \mathcal{F} \,\}$ satisfaz a condição C, pois se $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ e se $F \in \mathcal{F}$ for tal que $F \subset \bigcap_{i=1}^n F_i$, então

$$\bigcap_{i=1}^n \pi_j(F_i) \supset \pi_j\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) \supset \pi_j(F).$$

Logo, pela proposição 2.5.4, existe algum $a_j \in E_j$ que adere a todos os elementos de $\mathcal{F}_j$. Vai-se provar que $(a_i)_{i\in I}$ adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$. Isto é o mesmo que dizer que qualquer aberto de E que contenha $(a_i)_{i\in I}$ intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}$ e esta afirmação equivale, como já foi visto, a afirmar que qualquer aberto de E que contenha $(a_i)_{i\in I}$ pertence a $\mathcal{F}$. Seja então A um aberto de E que contenha $(a_i)_{i\in I}$. Pela definição da topologia de E, $A = \prod_{i\in I} A_i$, onde, para cada $i \in I$, A_i é um aberto de E_I e, além disso, existe uma parte finita J de I tal que, para cada $i \in I \setminus J$, $A_i = E_i$. Se, para cada $j \in J$, $A(j) = \prod_{i \in I} A_i^*$, com

$$(\forall i \in I) : A_i^* = \begin{cases} E_i & \text{se } i \neq j \\ A_j & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então cada $A(j)$ ($j \in J$) é um aberto de E e

$$A = \bigcap_{j \in J} A(j). \tag{2.5}$$

Foi visto atrás que $\mathcal{F}$ é estável para intersecções finitas e, portanto, se se provar que cada $A(j)$ pertence a $\mathcal{F}$, resultará de (2.5) que $A \in \mathcal{F}$. Mas, se $j \in J$, $A(j) = \pi_j^{-1}(A_j)$, pelo que

$$\begin{aligned} A(j) \in \mathcal{F} &\iff (\forall F \in \mathcal{F}) : A(j) \cap F \neq \emptyset \\ &\iff (\forall F \in \mathcal{F}) : \pi_j^{-1}(A_j) \cap F \neq \emptyset \\ &\iff (\forall F \in \mathcal{F}) : A_j \cap \pi_j(F) \neq \emptyset \\ &\iff (\forall F \in \mathcal{F}_j) : A_j \cap F \neq \emptyset \end{aligned}$$

e esta última afirmação é verdadeira, pois $a_j \in A_j$ pelo que, pela escolha de a_j, a_j adere a todos os elementos de $\mathcal{F}_j$ e resulta então de A_j ser aberto e da definição de aderência que A_j intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}_j$.

Passemos agora ao caso geral. Seja então $\mathcal{F}$ uma família de partes de E que satisfaz a condição C. Se se provar que existe alguma família $\mathcal{F}^*$ que contém $\mathcal{F}$ e que é maximal relativamente à condição C, então o teorema estará demonstrado, pois já foi visto que existe então algum $a \in E$ que adere a todos os elementos de $\mathcal{F}^*$ e, por maioria de razão, a adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$. Para mostrar que existe uma família $\mathcal{F}^*$ nas condições pretendidas basta, pelo que foi observado após o enunciado do princípio da maximalidade de Hausdorff, que se mostre que se P for uma família de partes de E totalmente ordenada por inclusão tal que cada elemento de P satisfaz a condição C e se $\mathcal{F}'$ for a união de todos os elementos de P, então $\mathcal{F}'$ também satisfaz a condição C. Sejam então $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$; quer-se mostrar que $\bigcap_{i=1}^n F_i$ contém algum $F \in \mathcal{F}'$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe algum $\mathcal{F}_i \in P$ tal que $F_i \in \mathcal{F}_i$. Como P está totalmente ordenado por inclusão, existe algum $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\mathcal{F}_j \supset \mathcal{F}_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo, $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}) : F_i \in \mathcal{F}_j$ e, como $\mathcal{F}_j$ satisfaz a condição C, $\bigcap_{i=1}^n F_i \supset F$, para algum $F \in \mathcal{F}_j$. Como $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}'$, isto conclui a demonstração. ∎

Corolário 2.5.5
Seja $n \in \mathbb{N}$. *Relativamente à topologia usual de* $\mathbb{R}^n$, *um sub-espaço de* $\mathbb{R}^n$ *é compacto se e só se for fechado e limitado.*

Demonstração: Se um sub-espaço K de $\mathbb{R}^n$ for compacto, então é fechado (pela proposição 2.5.2) e limitado (como foi observado na página 108).

Reciprocamente, se K for fechado e limitado então, como é limitado, está contido em algum produto da forma $\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$. Mas este último espaço é compacto, pelos teoremas de Heine-Borel e de Tychonoff. Como K é um fechado de $\mathbb{R}^n$ então é um fechado de $\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$, pelo que é compacto, pela proposição 2.5.1. ■

Será vista na página 120 uma demonstração deste corolário que não recorre ao teorema de Tychonoff.

2.5.3 Espaços métricos compactos

Vai ser demonstrado para espaços métricos um teorema que generaliza o facto de as partes compactas de $\mathbb{R}^n$ são aquelas que são fechadas e limitadas.

Definição 2.5.4 Diz-se que um sub-conjunto A de um espaço métrico é *totalmente limitado* se, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, A estiver contido na reunião de um número finito de bolas abertas $B(a, \varepsilon)$ $(a \in A)$. Diz-se que um espaço métrico é totalmente limitado se for um sub-conjunto totalmente limitado de si próprio.

É imediato que o conceito de «conjunto totalmente limitado» é absoluto e não relativo, pois na definição só intervêm os pontos de A.

Por outro lado se, na definição de conjunto totalmente limitado, se tivessem considerado bolas centradas em pontos do espaço todo (que será designado por E), obtinha-se uma definição equivalente. É claro que se um conjunto A estiver, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, contido na reunião de um número finito de bolas abertas de raio ε centradas em pontos de A então, por maioria de razão, o mesmo acontece com bolas abertas centradas em pontos de E. Reciprocamente, seja $A \subset E$ tal que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, A esteja contido na reunião de um número finito de bolas abertas de raio ε; quer-se mostrar que é possível tomar tais bolas centradas em pontos de A. Sabe-se que existem $x_1, \ldots, x_n \in E$ tais que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{2.6}$$

e pode-se supor, sem perda de generalidade, que cada uma das bolas abertas do membro da direita de (2.6) intersecta A. Se, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_k \in A \cap B(x_k, \varepsilon/2)$, então, uma vez que

$$(\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}) : B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B(a_k, \varepsilon),$$

resulta de (2.6) que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)$.

Naturalmente, qualquer parte totalmente limitada de um espaço métrico é limitada, mas o recíproco é falso.

Exemplo 2.5.8 Se se considerar em $\mathbb{R}$ a métrica discreta, então $\mathbb{R}$ é um sub-conjunto limitado de si próprio, mas não é totalmente limitado, pois não está contido na reunião de um número finito de bolas de raio 1.

Exemplo 2.5.9 Em $\mathbb{R}^n$ qualquer sub-conjunto limitado A é totalmente limitado (relativamente à métrica usual). Então, se $x \in \mathbb{R}$ e se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lfloor ax \rfloor / a \in \frac{1}{a}\mathbb{Z}$ e

$$x - \frac{\lfloor ax \rfloor}{a} = \frac{ax - \lfloor ax \rfloor}{a} \in [0, 1/a[.$$

Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$. Vai-se mostrar que A está contido na união de um número finito de bolas abertas de raio $\sqrt{n}/a$; como a pode ser tão grande quanto se queira, resulta daqui que A é totalmente limitado.

Se $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, então

$$(x_1, \ldots, x_n) \in B\big((\lfloor ax_1 \rfloor / a, \ldots, \lfloor ax_n \rfloor / a), \sqrt{n}/a\big). \tag{2.7}$$

Mas, como A é limitado, A está contido em algum conjunto da forma

$$[p_1/a, q_1/a] \times [p_2/a, q_2/a] \times \cdots \times [p_n/a, q_n/a],$$

onde cada p_i e cada q_i pertence a $\mathbb{Z}$. Deduz-se então de (2.7) que A está contido na união das bolas de raio $\sqrt{n}/a$ cujos centros são os n-uplos da forma $(r_1/a, \ldots, r_n/a)$, onde cada r_i é um inteiro do intervalo $[p_i, q_i]$.

Teorema 2.5.5
Se K for um espaço métrico, então as condições seguintes são equivalentes:

1. K *é compacto;*
2. K *é completo e totalmente limitado;*
3. *qualquer sucessão de elementos de* K *possui uma sub-sucessão convergente.*

Demonstração: A demonstração será feita segundo o esquema $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Comece-se por supor que K é compacto; pretende-se mostrar que K é completo e totalmente limitado. Que é totalmente limitado resulta de se ter, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $K \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$ e de K ser compacto. Para se mostrar que K é completo, considere-se uma sucessão de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K. Sabe-se, pelo corolário 2.5.4, que alguma sub-sucessão $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ da sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Então, pelo lema 1.4.1, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Suponha-se agora que K é um completo e totalmente limitado e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de K; quer-se mostrar que alguma sua sub-sucessão converge. Uma vez que K é completo, basta mostrar que alguma sub-sucessão de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como K é totalmente limitado, é a reunião de um número finito de bolas de raio $1/2$, pelo que existe um sub-conjunto infinito N_1 de $\mathbb{N}$ tal que $\{ x_n \mid n \in N_1 \}$ está contido numa tal bola; em particular,

$$m, n \in N_1 \Longrightarrow d(x_m, x_n) < 1.$$

Seja n_1 o primeiro elemento de N_1. Repetindo o que foi feito atrás mas desta vez com bolas de raio $1/4$, obtém-se um sub-conjunto infinito N_2 de $N_1 \setminus \{n_1\}$ tal que

$$m, n \in N_2 \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \frac{1}{2};$$

define-se então n_2 como sendo o primeiro elemento de N_2. Prosseguindo deste modo, obtém-se uma sub-sucessão $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ da sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(\forall p, q \in \mathbb{N}) : d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \frac{1}{\min\{p, q\}}.$$

Logo, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Como, pela proposição 2.5.2, K é um fechado de E, $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \in K$, pelo corolário 1.4.1.

Finalmente, vai-se supor que qualquer sucessão de elementos de K possui uma sub-sucessão convergente para um elemento de K; quer-se mostrar que K é compacto. Seja então $(A_j)_{j \in J}$ uma cobertura aberta de K; quer-se mostrar que possui uma sub-cobertura finita. Vai-se começar por mostrar que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, para cada $x \in K$, $B(x, \delta) \cap K$ está contido em algum A_j. Suponha-se, por redução ao absurdo, que não existe um tal δ. Para cada $n \in \mathbb{N}$ é então possível encontrar algum $x_n \in K$ tal que

$$(\forall j \in J) : B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \cap K \not\subset A_j. \tag{2.8}$$

Seja $x \in K$ tal que x seja limite de alguma sub-sucessão da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e seja $j \in J$ tal que $x \in A_j$; visto que A_j é um aberto de K, existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, 1/N) \cap K \subset A_j$. Tome-se $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 2N$ e que $d(x, x_n) < 1/2N$. Então tem-se:

$$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \cap K \subset B\left(x, \frac{1}{N}\right) \cap K \subset A_j,$$

o que contradiz (2.8).

Suponha-se agora que a cobertura aberta $(A_j)_{j\in J}$ não possui qualquer sub-cobertura finita. Então $K \neq \emptyset$ e pode-se obter uma sucessão de elementos de K do seguinte modo: x_1 é um elemento qualquer de K e, uma vez definidos $x_1, \ldots, x_n \in K$, escolhem-se $j(1), \ldots, j(n) \in J$ tais que $(\forall k \in \{1, \ldots, n\}) : B(x_k, \delta) \cap K \subset A_{j(k)}$; toma-se então para x_{n+1} algum elemento de $K \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_{j(k)}$. É claro que se $m, n \in \mathbb{N}$ e se $m \neq n$, então $d(x_m, x_n) \geqslant \delta$, pelo que nenhuma sub-sucessão da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e, portanto, nenhuma sub-sucessão da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Isto é absurdo, pois está-se a supor que qualquer sucessão de elementos de K possui uma sub-sucessão que converge para algum elemento de K. ∎

Este teorema permite dar uma nova demonstração do corolário 2.5.5. Com efeito, para o demonstrar basta ver que um sub-conjunto de $\mathbb{R}^n$ é completo se e só se for fechado (pela proposição 1.5.2) e é limitado se e só se for totalmente limitado (veja-se o exemplo 2.5.9).

Exemplo 2.5.10 O conjunto de Cantor é compacto, pois é um sub-conjunto de $\mathbb{R}$ que é limitado (está contido em $[0, 1]$) e é fechado (por ser a intersecção de uma família de fechados).

Exemplo 2.5.11 A esfera

$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

é compacta pois é fechada e limitada. Consequentemente, deduz-se da proposição 2.5.3 que o plano projectivo é compacto, pois, uma vez que qualquer recta de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem intersecta S^2, $P_2(\mathbb{R}) = \pi(S^2)$.

Convém ter algum cuidado ao aplicar-se o teorema 2.5.5 para demonstrar que um sub-espaço K de um espaço métrico E é compacto usando a terceira condição do teorema. Esta condição, aplicada a um sub-espaço K, significa que qualquer sucessão de elementos de K tem uma sub-sucessão convergente *em* K, i. e. convergente para um elemento de K. Assim, por exemplo, qualquer sucessão de elementos de $]0,1[$ tem alguma sub-sucessão convergente em $\mathbb{R}$ (relativamente à topologia usual), mas não tem necessariamente uma sub-sucessão convergente em $]0,1[$ (considere-se a sucessão $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, por exemplo).

Corolário 2.5.6
Qualquer espaço métrico compacto é separável.

Demonstração: Se $K=\emptyset$, o resultado é trivial; vai-se agora supor que K não é vazio. Sabe-se que K é um sub-conjunto totalmente limitado de si próprio. Existe então, para cada $n\in\mathbb{N}$, algum sub-conjunto finito F_n de K tal que, para cada elemento $k\in K$, a distância de k a algum elemento de F_n é inferior a $1/n$. Seja então $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de elementos de K tal que

$$\begin{aligned}
\{k_1,\ldots,k_{n_1}\} &= F_1 \text{ para algum } n_1\in\mathbb{N}\\
\{k_{n_1+1},\ldots,k_{n_2}\} &= F_2 \text{ para algum } n_2>n_1\\
\{k_{n_2+1},\ldots,k_{n_3}\} &= F_3 \text{ para algum } n_3>n_2
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Então, se $x\in K$ e se $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, toma-se $m\in\mathbb{N}$ tal que $1/m\leqslant\varepsilon$; pela definição de $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem-se $d(k_n,x)<1/m\leqslant\varepsilon$ para algum $n\leqslant n_m$. ∎

Definição 2.5.5 Seja E um espaço métrico e seja $(A_j)_{j\in J}$ uma cobertura aberta de E. Então diz-se que um número $\delta\in\mathbb{R}_+^*$ é um *número de Lebesgue* da cobertura dada se qualquer bola aberta de raio δ estiver contida em algum elemento da cobertura.

Naturalmente, uma cobertura aberta de um espaço métrico não tem necessariamente um número de Lebesgue. No entanto, foi visto no decorrer da demonstração do teorema 2.5.5 que as coberturas abertas dos espaços métricos compactos têm sempre um número de Lebesgue.

Proposição 2.5.5
Se K for um espaço métrico compacto, então qualquer cobertura aberta de K tem um número de Lebesgue.

Se I for um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e se f for uma função contínua de I em $\mathbb{R}$, então f é uniformemente contínua, conforme foi enunciado na página 20. Foi também aí afirmado que seria demonstrada uma generalização deste resultado. Trata-se do próximo teorema.

Teorema 2.5.6
Se (K, d_k) *e* (E, d_E) *são espaços métricos, sendo* K *compacto, então qualquer função contínua de* K *em* E *é uniformemente contínua.*

Demonstração: Seja f uma função contínua de K em E e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x, y \in K) : d_K(x, y) < \delta \Longrightarrow d_E\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Se $x \in K$, existe algum $\delta_x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall y \in B(x, \delta_x)) : d_E\big(f(x), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então $(B(x, \delta_x))_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K. Seja $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ um número de Lebesgue desta cobertura. Se $x, y \in K$ forem tais que $d(x, y) < \delta$, então $y \in B(x, \delta)$ e esta última bola está contida numa bola $B(z, \delta_z)$, para algum $z \in K$. Mas então

$$d_E\big(f(x), f(y)\big) \leqslant d_E\big(f(x), f(z)\big) + d_E\big(f(z), f(y)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Definição 2.5.6 Seja E um espaço topológico e seja $X \subset E$. Diz-se que X é *relativamente compacto* se $\overline{X}$ for compacto.

Resulta desta definição que cada parte relativamente compacta X de um espaço topológico E está contida num compacto. Caso E seja um espaço topológico separado, o recíproco é verdadeiro, pois se $X \subset K \subset E$ e se K for compacto, então, pela proposição 2.5.2, K é um fechado de E e, portanto, $\overline{X} \subset \overline{K} = K$. Como K é compacto, resulta da proposição 2.5.1 que $\overline{X}$ é um compacto.

Proposição 2.5.6
Sejam E *um espaço métrico e* $X \subset E$*. Então são condições equivalentes:*

1. X *é relativamente compacto;*
2. *qualquer sucessão de elementos de* X *tem alguma sub-sucessão convergente.*

Além disso, se E *for completo, as condições anteriores equivalem a:*

3. X *é totalmente limitado.*

Demonstração: Se X for relativamente compacto e se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de elementos de X, então, em particular, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\overline{X}$. Como este conjunto é compacto, a sucessão tem alguma sub-sucessão convergente.

Suponha-se agora que qualquer sucessão de elementos de X tem alguma sub-sucessão convergente; vai-se mostrar que $\overline{X}$ é compacto mostrando que qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\overline{X}$ tem alguma sub-sucessão que converge para algum elemento de $\overline{X}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n \in X$ tal que $d(x_n, y_n) < 1/n$, sendo d a distância do espaço métrico E. Por hipótese, alguma sub-sucessão $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ da sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum $x \in X$. Mas resulta então de se ter $(\forall n \in \mathbb{N}) : d(x_n, y_n) < 1/n$ que a sucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x.

Suponha-se agora que E é completo. Se X for relativamente compacto, então $\overline{X}$ é compacto e, portanto, totalmente limitado. Como $X \subset \overline{X}$, X também é totalmente limitado.

Finalmente, se X for totalmente limitado então $\overline{X}$ também o é. Com efeito, se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e se $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ então existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon')$, pelo que

$$\overline{X} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon')} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B(x_k, \varepsilon')} \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon).$$

Como se está a supor que E é completo, $\overline{X}$ é compacto, uma vez que é completo (pela proposição 1.5.2) e totalmente limitado. ∎

2.6 Exercícios

1) Seja X um conjunto e seja $\mathcal{T}$ o conjunto formado pelo conjunto vazio e pelos sub-conjuntos de X com complementar finito. Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia.

2) Sejam E um conjunto e $d\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma pseudo-métrica.

1. Defina «bola aberta centrada num ponto e raio r» e «conjunto aberto» de maneira idêntica à que foi feita em espaços métricos. Mostre que os conjuntos abertos em (E, d) formam uma topologia.

2. Suponha que d não é uma métrica. Mostre que a topologia associada a (E, d) (ver alínea anterior) não é metrizável.

3. Sejam $E = \{a, b\}$ e $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Mostre que E não é pseudo--metrizável, ou seja, mostre que não existe em E nenhuma pseudo--métrica que dê origem à topologia $\mathcal{T}$.
4. Seja $E = \{a, b, c\}$. Dê exemplo de uma topologia em E, distinta de $\big\{\emptyset, \{a, b, c\}\big\}$, que seja pseudo-metrizável mas não metrizável.

3) Dado um espaço topológico X, mostre que existe uma bijecção entre o conjunto dos abertos de X e o conjunto dos fechados de X.

4) Considere a família $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ constituída por $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e pelos sub--conjuntos de $\mathbb{R}$ da forma $]-\infty, a[$, com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que:

1. O conjunto $\mathcal{T}$ é uma topologia.
2. A topologia $\mathcal{T}$ não é metrizável.
3. A topologia $\mathcal{T}$ não é pseudo-metrizável.

5) Seja E um conjunto e seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ tal que

1. $\emptyset, E \in \mathcal{F}$;
2. se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de elementos de $\mathcal{F}$, então $\bigcap_{j\in J} A_j \in \mathcal{F}$;
3. se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de elementos de $\mathcal{F}$ e se J for finito, então $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{F}$.

Mostre que é possível definir uma e uma só topologia $\mathcal{T}$ em E tal que os fechados de $(E, \mathcal{T})$ sejam os elementos de $\mathcal{F}$.

6) Seja $n \in \mathbb{N}$. Para cada $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, seja $V(I)$ o conjunto dos zeros comuns a todos os elementos de I; por outras palavras,

$$V(I) = \{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid (\forall P \in I) : P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \,\}.$$

1. Mostre que o conjunto $\mathcal{T} = \big\{\, V(I)^{\complement} \;\big|\; I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \,\big\}$ forma uma topologia em $\mathbb{C}^n$.
2. Supondo que $n = 1$, mostre que a topologia assim obtida é a mesma que a do exercício 1.
3. Mostre que a topologia usual é mais fina do que a topologia $\mathcal{T}$.

7) Considere em $\mathbb{R}$ as topologias:

$\mathcal{T}$: topologia usual;

$\mathcal{T}_{\text{fin}}$: topologia do exercício 1.

$\mathcal{T}_{\text{num}}$: topologia relativamente à qual os fechados de $\mathbb{R}$ são $\mathbb{R}$ e as partes finitas ou numeráveis de $\mathbb{R}$;

$\mathcal{T}_{\text{dis}}$: topologia discreta;

$\mathcal{T}_{\leftarrow}$: topologia do exemplo 2.1.3.

Compare estas topologias duas a duas, ou seja, para cada duas veja se alguma delas é mais fina do que a outra.

8) Considere a família $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ constituída pelos conjuntos da forma $]-\infty, a]$, com $a \in \mathbb{R}$. Qual é a topologia menos fina que contém $\mathcal{B}$?

9) O espaço topológico $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é a topologia do exemplo 2.1.4, é separado?

10) Considere em $\mathbb{R}^2$ a métrica usual. Quais dos seguintes conjuntos são sistemas fundamentais de vizinhanças de $(0,0)$?

1. $\left\{ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1/n \} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $\left\{ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\varepsilon < x < \varepsilon \} \mid \varepsilon \in]0, +\infty[\right\}$
3. $\left\{ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < \varepsilon \} \mid \varepsilon \in]0, +\infty[\right\}$
4. $\left\{ S\big((0,0), 1/n\big) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

11) Seja E um espaço topológico cuja topologia é a topologia discreta. Mostre que cada ponto de E possui um sistema fundamental de vizinhanças formado por um único elemento.

12) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia do exercício 8. Mostre que cada ponto de $\mathbb{R}$ possui um sistema fundamental de vizinhanças formado por um único elemento. Mostre também que se a topologia considerada for aquela para a qual os abertos são $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e os conjuntos da forma $]-\infty, a[$ com $a \in \mathbb{R}$, então nenhum ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças finito.

13) Considere em $\mathcal{C}([0,1])$ as métricas do integral e do supremo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$V_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \;\middle|\; (\forall t \in [0,1]) : \big|f(t)\big| < \frac{1}{n} \right\}.$$

1. Mostre que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema fundamental de vizinhanças da função nula relativamente à métrica d'.
2. Mostre que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é um sistema fundamental de vizinhanças da função nula relativamente à métrica d.
3. Dê um exemplo de um sistema fundamental de vizinhanças numerável da função nula relativamente à métrica d.

14) Sejam E um espaço métrico e $a \in E$. Mostre que as bolas fechadas $B'(a, {}^1\!/_n)$ formam um sistema fundamental de vizinhanças do ponto a.

15) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$ definida no exercício 1.

1. Mostre que nenhum ponto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ possui um sistema fundamental de vizinhanças numerável.
2. Deduza que o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é metrizável.

16) Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja

$$\mathcal{V}_n = \{\, V \subset \mathbb{Z} \mid (\exists m \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{Z}) : n + km \in V \,\}.$$

Mostre que:

1. existe uma e uma só topologia $\mathcal{T}$ em $\mathbb{Z}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, o conjunto das vizinhanças de n em $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ seja $\mathcal{V}_n$;
2. a topologia $\mathcal{T}$ da alínea anterior é a do exemplo 2.1.4.

17) Considere-se em $\mathbb{R}$ uma topologia $\mathcal{T}_e$ para a qual, para cada $a \in \mathbb{R}$, as vizinhanças de a sejam os conjuntos que contêm algum intervalo $]b, a]$, com $b < a$. Analogamente, considere-se em $\mathbb{R}$ uma topologia $\mathcal{T}_d$ para a qual, para cada $a \in \mathbb{R}$, as vizinhanças de a sejam os conjuntos que contêm algum intervalo $[a, b[$, com $b > a$. Designe-se por $\mathcal{T}$ a topologia usual de $\mathbb{R}$.

1. Mostre que, para cada uma das propriedades atrás descritas, existe uma e uma só topologia que a satisfaz, i. e. mostre que existe uma e uma só topologia $\mathcal{T}_e$ em $\mathbb{R}$ que satisfaz a primeira condição e que existe uma e uma só topologia $\mathcal{T}_d$ em $\mathbb{R}$ que satisfaz a segunda.
2. Mostre que os intervalos $]b, a]$ são abertos em $\mathcal{T}_e$ e que os intervalos $[a, b[$ são abertos em $\mathcal{T}_d$.

3. Mostre que $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{T}_d$ são mais finas do que $\mathcal{T}$.

4. Dê um exemplo de um sub-conjunto de $\mathbb{R}$, diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{R}$, que seja aberto e fechado para a topologia $\mathcal{T}_e$. Analogamente para a topologia $\mathcal{T}_d$.

5. Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínua se entendida como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ mas contínua se entendida como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Problema análogo com $\mathcal{T}_d$ em substituição de $\mathcal{T}_e$.

6. Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

   a) f é contínua de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ mas é descontínua como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

   b) f é contínua de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ mas é descontínua como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.

7. Qual é a topologia mais fina que está contida simultaneamente em $\mathcal{T}_e$ e em $\mathcal{T}_d$? E qual é a topologia menos fina que contém ambas?

18) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$ definida no exercício 1. A função

$$\exp\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$$

é contínua? E se no enunciado se substituir $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$?

19) Sejam X um espaço topológico, $x_0 \in X$ e f uma função de X em $\mathbb{R}$. Diz-se que f tem um máximo local em x_0 se existir uma vizinhança V de x_0 tal que

$$(\forall x \in V) : f(x) \leqslant f(x_0).$$

Mostre que f é contínua em x_0 relativamente à topologia do exercício 8 se e só se f tiver um máximo local em x_0.

20) Sejam X um espaço topológico e $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dado $b \in X$, diz-se que f é semi-contínua superiormente em b se f for contínua em b quando se considera em $\mathbb{R}$ a topologia do exercício 4. Analogamente, f diz-se semi-contínua inferiormente em b se f for contínua em b quando se considera em $\mathbb{R}$ a topologia para a qual os abertos de $\mathbb{R}$ são $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e os conjuntos da forma $]a, +\infty[$ com $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que f é semi-contínua superiormente (respectivamente inferiormente) se for semi-contínua superiormente (resp. inferiormente) em todos os pontos de X.

1. Dado $b \in X$, mostre que f é contínua em b (relativamente à métrica usual de $\mathbb{R}$) se e só se f for semi-contínua superiormente e inferiormente em b.

2. Sejam $A \subset X$ e $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a função característica de A. Mostre que χ_A é semi-contínua superiormente (resp. inferiormente) se e só se A é um fechado (resp. aberto) de X.

3. Mostre que f é semi-contínua superiormente se e só se $-f$ é semi--contínua inferiormente.

4. Seja $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de funções de X em $\mathbb{R}$. Supondo que cada, para cada $\lambda \in \Lambda$, f_λ é semi-contínua superiormente (resp. inferiormente) e que existe a função $\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ (resp. $\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$), mostre que esta função é semi-contínua superiormente (resp. inferiormente).

21) Sejam X e Y espaços topológicos e $f\colon Y \longrightarrow X$ uma função contínua. Mostre que as condições seguintes são equivalentes:

(a) a topologia de Y é a topologia inicial relativamente à função f;

(b) quaisquer que sejam o espaço topológico Z e $g\colon Z \longrightarrow Y$ então g é contínua se e só se $f \circ g$ é contínua.

22) Enuncie e demonstre um resultado análogo ao do exercício anterior referente à topologia final.

23) Sejam X e Y espaços topológicos e f uma função de Y em X. Suponha--se que $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ é base da topologia de X. Mostre que f é contínua se e só se para todo o $B \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(B)$ é aberto.

24) Seja E um espaço topológico. Diz-se que um aberto de E é *regular* se for igual ao interior da sua aderência e diz-se que um fechado de E é *regular* se for igual à aderência do seu interior.

1. Seja $A \subset E$. Mostre que A é um aberto regular de E se e só se $A^{\complement}$ for um fechado regular de E.

2. Dê um exemplo de um aberto de $\mathbb{R}$ que não seja regular (relativamente à topologia usual).

3. Mostre que a intersecção de dois abertos regulares de E é um aberto regular de E.

4. Dê um exemplo de dois abertos regulares de um espaço topológico cuja reunião não seja um aberto regular.

25) Sejam M um conjunto com uma relação binária $\mathcal{R}$ anti-simétrica, isto é, uma relação binária que satisfaz a relação:

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\wedge\; y\,\mathcal{R}\,x \Longrightarrow x = y.$$

Sejam $f\colon M \longrightarrow M$ e $g\colon M \longrightarrow M$ funções tais que:

i. $f \circ f = f \;\wedge\; g \circ g = g$;

ii. $(\forall x \in M) : f(x)\,\mathcal{R}\,x \;\wedge x\,\mathcal{R}\,g(x)$;

iii. $x\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow (f(x)\,\mathcal{R}\,f(y) \;\wedge\; g(x)\,\mathcal{R}\,g(y))$.

Sejam $\varphi = f \circ g$ e $\psi = g \circ f$. Mostre que $\varphi \circ \varphi = \varphi$ e $\psi \circ \psi = \psi$. Use este resultado para deduzir, de forma imediata, que, se X é um espaço topológico, então qualquer $A \subset X$ satisfaz

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}} \;\wedge \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}},$$

ou seja, $\mathring{\overline{A}}$ é um aberto regular de X e $\overline{\mathring{A}}$ é um fechado regular de X.

26) Sejam X um espaço topológico e $A, B \subset X$. Mostre que:

1. A é fechado se e só se $\mathbf{Fr}\,A \subset A$;
2. A é aberto se e só se $\mathbf{Fr}\,A \subset A^{\complement}$;
3. $\mathbf{Fr}\,A = \emptyset$ se e só se A é fechado e aberto;
4. $\mathbf{Fr}(\mathbf{Fr}\,A) \subset \mathbf{Fr}\,A$;
5. $\mathbf{Fr}(A \cup B) \subset \mathbf{Fr}(A) \cup \mathbf{Fr}(B)$;
6. não se tem necessariamente $\mathbf{Fr}(A \cap B) \subset \mathbf{Fr}(A) \cap \mathbf{Fr}(B)$ nem $\mathbf{Fr}(A) \cap \mathbf{Fr}(B) \subset \mathbf{Fr}(A \cap B)$.

27) Sejam X um espaço topológico, $A \subset X$ e $a \in A$. Mostre que a é um ponto isolado de A se e só se $\{a\}$ é um aberto do sub-espaço A.

28) Quais dos seguintes espaços topológicos são perfeitos?

1. $\mathbb{Q}$ com a métrica usual;

2. $\mathbb{Q}$ com a métrica p-ádica (sendo p um primo natural);
3. $\mathbb{R}$ com a topologia discreta;
4. $\mathbb{R}$ com a topologia do exercício 1.

29) Seja X um conjunto e seja $\alpha\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ uma função tal que:

- $\alpha(\emptyset) = \emptyset$;
- $(\forall A \subset X) : A \subset \alpha(A)$;
- $(\forall A \subset X) : \alpha\big(\alpha(A)\big) = \alpha(A)$;
- $(\forall A, B \subset X) : \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$.

Seja $\mathcal{F} = \{\, B \subset X \mid B = \alpha(B) \,\}$.

1. Mostre que se $A, B \subset X$ e $A \subset B$, então $\alpha(A) \subset \alpha(B)$.
2. Seja $A \subset X$. Se $B \in \mathcal{F}$ for tal que $A \subset B$, mostre que $\alpha(A) \subset B$. Conclua que $\alpha(A)$, que pertence a $\mathcal{F}$, é o mínimo dos elementos de $\mathcal{F}$ que contêm A.
3. Mostre que existe uma e uma só topologia $\mathcal{T}$ em X para a qual os fechados de $(X, \mathcal{T})$ são os elementos de $\mathcal{F}$.
4. Mostre que no espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ se tem:
$$(\forall A \subset X) : \overline{A} = \alpha(A).$$

30) Seja $\hat{\mathbb{R}}$ a recta real completada com os pontos $-\infty$ e $+\infty$, com a topologia definida no exemplo 2.1.1. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual. Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ \pi/2 & \text{se } x = +\infty \\ -\pi/2 & \text{se } x = -\infty \end{cases} \end{array}$$

é contínua. Sugestão: use o facto de que $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$.

31) Seja $\overline{\mathbb{R}}$ a recta real completada com o ponto ∞, com a topologia definida no exemplo 2.2.17; seja $\hat{\mathbb{R}}$ como no exercício anterior. Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{se } x = \pm\infty \end{cases} \end{array}$$

é contínua.

32) Seja $\hat{\mathbb{R}}$ como no exercício 30 e seja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}$ definida por $f(x) = {}^{1}/_{x}$. Verifique se f tem prolongamento contínuo a:

1. $\mathbb{R}$;
2. $\hat{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$;
3. $\hat{\mathbb{R}}$.

Resolva problemas análogos relativamente a $g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \hat{\mathbb{R}}$ definida por $g(x) = {}^{1}/_{|x|}$.

33) Resolva o exercício análogo ao anterior mas considerando agora $\overline{\mathbb{R}}$ como no exercício 31.

34) Mostre que qualquer função contínua de $\hat{\mathbb{R}}$ em $\mathbb{R}$ é limitada (ou seja, tem imagem limitada). Se se substituir $\hat{\mathbb{R}}$ por $\overline{\mathbb{R}}$, o resultado mantém-se?

35) Seja $L \subset \mathbb{R}^2$ o laço de equação $y^2 = x^2(1-x^2)$ com a topologia usual. Considere a bijecção contínua

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & L \\ & u & \rightsquigarrow & \frac{2u}{u^2+1}\left(1, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right). \end{array}$$

Seja $\mathcal{T}$ a topologia em $\mathbb{R}$ obtida por transporte da topologia de L via a bijecção f.

1. Mostre que f não é um homeomorfismo relativamente à topologia usual de $\mathbb{R}$.
2. Mostre que a restrição de f a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ é um homeomorfismo sobre a imagem.
3. Dê um exemplo de uma aplicação contínua de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ que não seja contínua como aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

4. Dê um exemplo de uma aplicação contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a topologia usual que não seja contínua como aplicação de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

36) Verifique que os seguintes sub-espaços de $\mathbb{R}^2$ são dois a dois homeomorfos:

– $A = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\,\}$;

– $B = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\,\}$;

– $C = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\,\}$.

37) Verifique que os seguintes sub-espaços de $\mathbb{R}^3$ são dois a dois homeomorfos:

– $A = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$;

– $B = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } |z| < 1\,\}$;

– $C = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } |z| \neq 1\,\}$.

38) Sejam A e C como no exercício anterior. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $P_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = k\}$; para cada $\varphi \in \mathbb{R}$, seja S_φ o semi-plano

$$S_\varphi = \{\,\lambda(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0) + (0, 0, \mu) \mid \lambda > 0 \text{ e } \mu \in \mathbb{R}\,\}.$$

Considere homeomorfismos $\psi\colon C \longrightarrow A$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Deixam fixos os pontos de $C \cap A$;

2. Enviam circunferências $C \cap P_k$ $(-1 < k < 1)$ em circunferências $A \cap P_l$.

3. Enviam cada semi-meridiano $C \cap S_\varphi$ na geratriz $A \cap S_\varphi$ associada ao mesmo semi-plano S_φ.

Mostre que os homeomorfismos $\psi\colon C \longrightarrow A$ satisfazendo as condições acima indicadas são da forma:

$$(x, y, z) \rightsquigarrow \left(\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}, g(z)\right)$$

em que $g\colon]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo tal que $g(0) = 0$.

Nota: Entre os homeomorfismos atrás considerados encontra-se a projecção Mercator, usada na feitura de mapas da superfície terrestre. Tem a particularidade adicional de preservar ângulos. Qual a vantagem que os mapas feitos usando a projecção Mercator trouxeram para a navegação marítima? (Para os alunos que já frequentaram ou estão a frequentar Geometria Diferencial: Considere as seguintes funções $g\colon]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $g(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$;
2. $g(z) = \frac{z}{1-|z|}$;
3. $g(z) = \frac{z}{1-z^2}$;
4. $g(z) = \operatorname{arctanh}(z)$.

Qual destas corresponde, nas notações atrás usadas, à projecção Mercator?)

39) Mostre que $\mathbb{Q}$, munido da topologia usual, não é topologicamente completo.

40) Mostre que qualquer espaço topológico discreto é topologicamente completo.

41) É possível definir alguma topologia em $\mathbb{Q}$, além da topologia discreta, relativamente à qual $\mathbb{Q}$ seja topologicamente completo?

42) Neste exercício quer-se mostrar que $P_2(\mathbb{R})$ é metrizável.

1. Seja
$$\begin{array}{rccc} d\colon & S^2 \times S^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (p,q) & \rightsquigarrow & \min\{\|p-q\|, \|p+q\|\}. \end{array}$$
Mostre que d é uma pseudo-métrica e que se $p, q \in S^2$ são tais que $d(p,q) = 0$, então $p = \pm q$.

2. Seja $\left(\widetilde{S^2}, d\right)$ o espaço métrico obtido a partir de S^2 e da pseudo--métrica d pelo método indicado na página 4. Mostre, para cada recta $r \in P_2(\mathbb{R})$, $r \cap S^2$ é uma classe de equivalência em S^2 e que a função
$$\begin{array}{ccc} P_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \widetilde{S^2} \\ r & \rightsquigarrow & r \cap S^2 \end{array}$$
é um homeomorfismo de $P_2(\mathbb{R})$ em $\widetilde{S^2}$. Deduza que $P_2(\mathbb{R})$ é metrizável.

43) Seja X um espaço topológico separado e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de X. Suponha que as sucessões $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes. Mostre que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

44) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$ do exercício 1. Mostre que a sucessão $1, 2, 3, \ldots$ converge para qualquer ponto de $\mathbb{R}$. Deduza que o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é separado.

45) Mostre que em qualquer espaço topológico as sucessões quase--constantes são convergentes.

46) Considere em $\mathbb{R}$ as topologias $\mathcal{T}_{\text{dis}}$ e $\mathcal{T}_{\text{num}}$ do exercício 7. Mostre que:

1. Relativamente a qualquer uma destas topologias, as únicas sucessões convergentes são as quase-constantes.
2. A função
$$\begin{aligned} f\colon \ (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{num}}) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{dis}}) \\ x &\rightsquigarrow x \end{aligned}$$
não é contínua mas satisfaz a propriedade seguinte: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão convergente do domínio de f, então a sucessão $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ também é convergente.
3. Deduza da alínea anterior que o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{num}})$ não é 1-numerável.

47) Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F}(X)$ o conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$. Diz-se que uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}(X)$ converge uniformemente para uma função $f \in \mathcal{F}(X)$ se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X) : n \geqslant p \Longrightarrow \big|f(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon.$$

Mostre que uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}(X)$ converge uniformemente para uma função $f \in \mathcal{F}(X)$ se e só se convergir para f relativamente à topologia da convergência uniforme (definida no exemplo 2.1.2).

48) Mostre que se se considerar em $\mathbb{R}$ a métrica

$$\begin{aligned} d\colon \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightsquigarrow \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| \end{aligned}$$

então o espaço métrico assim obtido não é completo, embora a topologia induzida por d seja a topologia usual em $\mathbb{R}$. Sugestão: entre em conta com o facto de esta métrica ser a mesma que foi considerada no exemplo 2.1.1.

49) Defina em $]0, +\infty[$ uma métrica d que induza a topologia usual e tal que $(]0, +\infty[, d)$ seja um espaço métrico completo.

50) Considere $\mathbb{N}$ como sub-espaço de $\hat{\mathbb{R}}$. Sejam (E, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) A sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy.

(b) A função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \rightsquigarrow & x_n \end{array}$$

é uniformemente contínua relativamente à métrica em $\hat{\mathbb{R}}$ definida no exercício 48.

51) Sejam X e Y espaços topológicos. Mostre que a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X \times Y & \longrightarrow & Y \times X \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (y, x) \end{array}$$

é contínua.

52) Sejam X_1 e X_2 espaços topológicos, $U_1 \subset X_1$ e $U_2 \subset X_2$. Mostre que no espaço topológico produto $X_1 \times X_2$ se tem:

1. $\overbrace{U_1 \times U_2}^{\circ} = \mathring{U}_1 \times \mathring{U}_2$.
2. $\overbrace{U_1 \times X_2 \cup X_1 \times U_2}^{\circ} = \mathring{U}_1 \times X_2 \cup X_1 \times \mathring{U}_2$.
3. $\operatorname{Fr}(U_1 \times U_2) = \operatorname{Fr}(U_1) \times \overline{U_2} \cup \overline{U_1} \times \operatorname{Fr} U_2$.

53) Seja X um espaço topológico. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) O espaço topológico X é separado.

(b) O conjunto $\{\, (x, x) \in X \times X \mid x \in X \,\}$ é um fechado de $X \times X$.

54) Seja E um espaço topológico separado e seja f uma função contínua de E em E. Mostre que o gráfico de E (i. e. $\{\,(x,y)\in E^2 \mid y=f(x)\,\}$) é um fechado de E^2 relativamente à topologia produto.

55) Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } x=y=0. \end{cases} \end{array}$$

Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual e em $\mathbb{R}^2$ a topologia produto. Mostre que:

1. A função f não é contínua.
2. Para cada $y\in\mathbb{R}$, as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $x\mapsto f(x,y)$ e por $x\mapsto f(y,x)$ são contínuas.

56) Seja X um conjunto e considere o produto cartesiano $\prod_{x\in X}\mathbb{C}$. Cada elemento de $\prod_{x\in X}\mathbb{C}$ é uma família $(f(x))_{x\in X}$, onde cada $f(x)$ é um número complexo. Por outras palavras, cada elemento de $\prod_{x\in X}\mathbb{C}$ é uma função de X em $\mathbb{C}$ e, reciprocamente, cada função de X em $\mathbb{C}$ é um elemento de $\prod_{x\in X}\mathbb{C}$. Mostre que uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\prod_{x\in X}\mathbb{C}$ converge para uma função $f\colon X\longrightarrow\mathbb{C}$ relativamente à topologia produto se e só se

$$(\forall x\in X): \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x).$$

57) Seja X um conjunto e considere em $\mathcal{F}(X)$ a topologia do exercício anterior. Mostre que são condições equivalentes:

(a) X é numerável;

(b) $\mathcal{F}(X)$ é 1-numerável.

58) Seja $(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família numerável de espaços topológicos; para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $A_n\subset E_n$. Mostre que:

$$\overline{\prod_{n=1}^{\infty} A_n} = \prod_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}.$$

59) Seja $(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família numerável de espaços métricos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, d_n seja majorada por 1. Considere no conjunto $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ as distâncias d_{sup} e d_Σ definidas por:

$$d_{\text{sup}}\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{n}$$
$$d_\Sigma\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Mostre que estas distâncias são uniformemente equivalentes, ou seja, mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} \left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n, d_{\text{sup}}\right) & \longrightarrow & \left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n, d_\Sigma\right) \\ x & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

e a sua inversa são uniformemente contínuas. Sugestão: para mostrar que a função dada é uniformemente contínua, mostre que, dados dois elementos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$, se tem:

$$d_\Sigma\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\right) d_{\text{sup}}\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$$

e para mostrar que a função inversa também é uniformemente contínua, mostre que, dados $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $\varepsilon \in]0, +\infty[$, se se escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow d_n(x_n, y_n)/n < \varepsilon$, então tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} < \frac{\varepsilon N}{2^N} \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{n} < \varepsilon.$$

Nota: Como se pode observar facilmente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

60) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja E_n o espaço topológico $\mathbb{R}$ com a métrica usual e seja $A_n = [-1, 1]$. Calcule a aderência e o interior de $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ em $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$.

61) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $E_n = \{0, 1\}$, munido da topologia usual. Seja C o conjunto de Cantor. Conforme foi mencionado no exercício 70 do capítulo 1, os elementos de C são os números reais que podem ser escritos sob a forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$, com cada $a_n \in \{0, 2\}$ ($n \in \mathbb{N}$) e, além

disso, cada $x \in C$ só pode ser escrito daquela forma de uma só maneira. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & C & \longrightarrow & \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n \\ & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} & \rightsquigarrow & \left(\dfrac{a_n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Mostre que f é um homeomorfismo.

62) Para cada um dos espaços que se seguem, investigue se é ou não conexo (a menos de menção em contrário, considere a topologia usual):

1. $\mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{R}$ munido da métrica discreta;
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
4. $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\,\}$;
5. $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0\,\}$;
6. $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$;
7. $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\,\}$;
8. $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\,\}$;
9. $\mathbb{C} \setminus F$, onde F é uma parte finita de $\mathbb{C}$;
10. $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$, onde d_1 é a métrica do integral;
11. $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$, onde d_∞ é a métrica do supremo.

63) Seja C (respectivamente P) o espaço da sexta (resp. sétima) alínea do exercício anterior. Mostre que C tem a seguinte propriedade: para qualquer $p \in C$, $C \setminus \{p\}$ é conexo. Use este facto para mostrar que C e P não são homeomorfos.

64) Considere em $\mathbb{R}$ as topologias $\mathcal{T}_e$, $\mathcal{T}_d$ e $\mathcal{T}$ que foram consideradas no exercício 17. Mostre que as únicas funções contínuas de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ ou em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ são as funções constantes.

65) Seja

$$Y = \{\,(x, \operatorname{sen}(1/x)) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,\} \cup \{\,(0,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\,\}$$

com a topologia de sub-espaço de $\mathbb{R}^2$. Mostre que:

1. Y é conexo.

2. Y tem três componentes conexas por arcos.

66) Considere em $\mathbb{C}$ a métrica usual. Mostre que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ é conexo por arcos.

67) Seja $M(n, \mathbb{C})$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n com entradas complexas. Seja $GL(n, \mathbb{C}) \subset M(n, \mathbb{C})$ o sub-espaço das matrizes de determinante não nulo e $T(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$ o sub-espaço das matrizes triangulares superiores (de determinante não nulo). Considere $M(n, \mathbb{C})$ como espaço métrico identificando-o a $\mathbb{C}^{n^2}$; mais precisamente, considere em $M(n, \mathbb{C})$ a distância

$$d\big((a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\big) = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

1. Mostre que $GL(n, \mathbb{C})$ é um aberto de $M(n, \mathbb{C})$.

2. Mostre que $T(n, \mathbb{C})$ é conexo por arcos.

3. Mostre que $GL(n, \mathbb{C})$ é conexo por arcos Sugestão: usando o facto de que qualquer matriz de $M(n, \mathbb{C})$ é semelhante a uma matriz triangular superior, mostre que existe uma família de sub-espaços de $GL(n, \mathbb{C})$ homeomorfos a $T(n, \mathbb{C})$ cuja intersecção não é vazia e cuja reunião é igual a $GL(n, \mathbb{C})$.

68) Considere os espaços de matrizes com coeficientes reais $M(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ e $T(n, \mathbb{R})$ (as definições são análogas às de $M(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{C})$ e $T(n, \mathbb{C})$). Seja $O(n) \subset M(n, \mathbb{R})$ o sub-espaço das matrizes ortogonais (isto é, matrizes em que a transposta é igual à inversa).

1. Mostre que $GL(n, \mathbb{R})$ e $O(n)$ têm pelo menos duas componentes conexas por arcos. Sugestão: use a função determinante.

2. Dada uma matriz $M \in GL(n, \mathbb{R})$, mostre que existe um caminho em $GL(n, \mathbb{R})$ que começa em M e acaba num elemento de $O(n)$. Sugestão: se $0 \leqslant m \leqslant n$, seja $O_m(n)$ o espaço das matrizes $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tais que os m primeiros vectores coluna de A são dois a dois ortogonais e têm norma 1; observe que $O_0(n) = M(n, \mathbb{C})$ e que $O_n(n) = O(n)$. Se $m < n$ e $(E_1, E_2, \ldots, E_n) \in O_m(n)$

(sendo $E_1, \ldots, E_n$ vectores coluna), então a função ψ de $[0,1]$ em $GL(n, \mathbb{R})$ $(\subset (\mathbb{R}^n)^n)$ definida por

$$\psi_j(t) = \begin{cases} E_j & \text{se } j \neq m+1 \\ E_{m+1} - t\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(E_{m+1}.E_k)E_k & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um caminho entre $(E_1, \ldots, E_n)$ e uma matriz

$$(E_1, E_2, \ldots, E_m, E'_{m+1}, \ldots, E_n) \tag{2.9}$$

onde E'_{m+1} é ortogonal a $E_1, \ldots, E_n$. Então $\varphi\colon [0,1] \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ definida por

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} E_j & \text{se } j \neq m+1 \\ \left(1 + t\left(\|E'_{m+1}\|^{-1} - 1\right)\right)E'_{m+1} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um caminho entre (2.9) e um elemento de $O_{m+1}(n)$.

3. Mostre que $T(n, \mathbb{R})$ tem 2^n componentes conexas por arcos.

69) Mostre que qualquer espaço topológico grosseiro é compacto.

70) Seja E um espaço topológico e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente de elementos de E, sendo x um seu limite. Mostre que $\{x\} \cup \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ é um sub-espaço topológico compacto de E.

71) Seja E um espaço topológico e sejam $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sub-espaços compactos de E. Mostre que $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$ é compacto.

72) Deduza a proposição 2.5.1 da proposição 2.5.4.

73) Neste exercício vão ser estudados prolongamentos ao plano projectivo $P_2(\mathbb{R})$ de curvas do plano $\mathbb{R}^2$. Se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, então $\pi(x,y,z)(\in P_2(\mathbb{R}))$ também vai ser representado por (x,y,z). Seja P uma função polinomial de grau dois de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$; mais especificamente, sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, com a, b e c não todos nulos, e considere-se

$$\begin{array}{rccc} P\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \end{array}$$

Sejam Z_P o conjunto dos zeros de P e

$$\widetilde{Z_P} = \left\{ (x,y,z) \in P_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0 \right\}.$$

1. Mostre que a definição de $\widetilde{Z_P}$ faz sentido, i. e. mostre que

$$\big(\forall(x,y,z)\in\widetilde{Z_P}\big)(\forall\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}):(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in\widetilde{Z_P}.$$

2. Seja f a função de $\mathbb{R}^2$ em $P_2(\mathbb{R})$ que foi definida no exemplo 2.2.21. Mostre que $f(Z_P)\subset\widetilde{Z_P}$.

3. Suponha que $P(x,y)=xy-1$. Mostre que

   a) $\widetilde{Z_P}=f(Z_P)\cup\{(1,0,0),(0,1,0)\}$;

   b) $\widetilde{Z_P}$ é compacto e conexo. Sugestão: para mostrar que $\widetilde{Z_P}$ é conexo, mostre que é a reunião de $f(Z_P)$ com as imagens das funções

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \widetilde{Z_P}\\ x & \mapsto & (x^2,1,x)\end{array}\quad\text{e}\quad\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \widetilde{Z_P}\\ x & \mapsto & (1,x^2,x)\end{array}$$

   (comece por mostrar que estas definições fazem sentido, i. e. que se $x\in\mathbb{R}$ então $(x^2,1,x),(1,x^2,x)\in\widetilde{Z_P}$).

   c) $\widetilde{Z_P}=\overline{f(Z_P)}$.

4. Enuncie e demonstre resultados análogos aos anteriores quando

   a) $P(x,y)=y-x^2$;

   b) $P(x,y)=x^2+y^2-1$.

74) Seja E um espaço topológico separado e seja $\overline{E}=E\cup\{\infty\}$. Considere o conjunto:

$$\mathcal{T}=\{\,A\subset E\mid A\text{ é aberto}\,\}\cup\left\{\,A\subset\overline{E}\;\middle|\;\infty\in A\text{ e }A^{\complement}\text{ é compacto}\,\right\}.$$

1. Seja $A\in\mathcal{T}$. Mostre que $A\setminus\{\infty\}$ é um aberto de E.

2. Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia.

3. Mostre que a topologia de E como sub-espaço de $\overline{E}$ é a topologia original de E.

4. Mostre que $(\overline{E},\mathcal{T})$ é um espaço topológico compacto.

5. Supondo que $E=\mathbb{R}$ com a topologia usual, mostre que o espaço $\overline{\mathbb{R}}$ assim definido é o mesmo espaço topológico que foi considerado no exemplo 2.2.17.

6. Supondo que $E = \mathbb{Q}$ com a topologia usual, mostre que o espaço $\overline{\mathbb{Q}}$ assim definido não é separado.

7. Mostre que a topologia de $\overline{\mathbb{Q}}$ é diferente da de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ encarado como sub-espaço de $\overline{\mathbb{R}}$.

75) Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}$ do exemplo 2.1.3. Mostre que

1. $]-\infty, 0]$ é um sub-espaço compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$;

2. $]-\infty, 0]$ não é um fechado de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

76) Considere em $\mathcal{C}([0,1])$ as métricas do integral e do supremo. Para cada uma delas, mostre que $B'(0,1)$ não é um compacto. Sugestão: no caso da métrica do integral, mostre que $B'(0,1)$ não é completo; no caso da métrica do supremo, mostre que a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(x) = x^n$ não possui nenhuma sub-sucessão convergente.

77) Seja E o sub-espaço topológico de $(\mathcal{F}_l(\mathbb{N}), d_\infty)$ (onde d_∞ é a métrica do supremo) formado pelas sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $[-1,1]$ tais que a_n é nulo quando n é suficientemente grande. Mostre que (E, d_∞) não é compacto.

Sugestão: para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x(n) \in E$ a sucessão tal que $x(n)_m = 0$ se $m \neq n$ e $x(n)_n = 1$; mostre que a distância entre quaisquer dois elementos de $\{\, x(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ é igual a 1.

78) Mostre que qualquer sucessão limitada de números complexos tem alguma sub-sucessão convergente.

79) Neste exercício pretende-se demonstrar o teorema fundamental da Álgebra: qualquer função polinomial não constante de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tem, pelo menos, um zero.

1. Seja $p\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não constante, seja n o seu grau e seja a o coeficiente de z^n em $p(z)$. Mostre que existe algum $M \in \mathbb{R}_+$ tal que
$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |z| > M \Longrightarrow |p(z)| > \frac{|a|}{2}|z|^n.$$

2. Mostre que $p(\mathbb{C})$ é um fechado de $\mathbb{C}$. Sugestão: use a alínea anterior e o exercício anterior.

3. Mostre que $\mathbb{C}\setminus\{\,p(z)\mid z\in\mathbb{C}\wedge p'(z)=0\,\}$ é a reunião disjunta de $p(\mathbb{C})^{\complement}$ com $\{\,p(z)\mid z\in\mathbb{C}\wedge p'(z)\neq 0\,\}$. Use este facto para demonstrar que $p(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ e que, em particular, $0\in p(\mathbb{C})$. Sugestão: use o exercício 63 do capítulo 1 e a nona alínea do exercício 62.

80) Seja (E,d) um espaço métrico. Mostre que são condições equivalentes:

(a) qualquer parte fechada e limitada de E é compacta;

(b) E é completo e qualquer parte limitada de E é totalmente limitada.

81) Sejam (E,d) um espaço métrico e $L\subset E$. Mostre que são condições equivalentes:

(a) L é totalmente limitado;

(b) existe uma isometria de L num sub-espaço de um espaço métrico compacto.

Sugestão: use o facto, provado na demonstração da proposição 2.5.6, de que se L é totalmente limitado, então $\overline{L}$ também o é.

82) Seja E um espaço topológico, seja f uma função contínua de E em $\mathbb{R}$ e seja X uma parte relativamente compacta de E. Mostre que $f(X)$ é limitado.

83) A demonstração do teorema 2.5.6 foi baseada na proposição 2.5.5. Este exercício mostra como obter outra demonstração do mesmo teorema sem recorrer àquela proposição. Seja $f\colon K\longrightarrow E$ uma função que não seja uniformemente contínua.

1. Mostre que, para algum $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, existem sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tais que

$$(\forall n\in\mathbb{N}):d_K(x_n,y_n)<\frac{1}{n}\wedge d_E\big(f(x_n),f(y_n)\big)\geqslant\varepsilon.$$

2. Deduza que a função f não pode ser contínua.

Capítulo 3

Espaços de funções

Seja K um espaço topológico compacto. Vão ser vistos neste capítulo vários teoremas relativos ao espaço $\mathcal{C}(K)$ das funções contínuas de K em $\mathbb{C}$ ou ao seu sub-espaço $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ das funções contínuas de K em $\mathbb{R}$. Como, pelo corolário 2.5.2, qualquer função $f \in \mathcal{C}(K)$ é limitada e como $(\forall f, g \in \mathcal{C}(K)) : f - g \in \mathcal{C}(K)$ (isto será demonstrado mais à frente), faz sentido considerar em $\mathcal{C}(K)$ a métrica do supremo d_∞. A topologia que se vai considerar em $\mathcal{C}(K)$ será sempre a induzida por esta métrica, a menos que seja dito explicitamente o contrário.

3.1 Conjuntos densos de funções contínuas

Vão ser vistos nesta secção dois teoremas que dão condições suficientes para que um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ seja denso em $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, o segundo dos quais vai ser uma generalização da versão real do teorema da aproximação de Weierstrass.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Kakutani-Krein)
Se K for um espaço topológico compacto e se $\mathcal{F}$ for um conjunto de funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ tal que:

1. *se $k, k' \in K$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então existe alguma função $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(k) = a$ e que $f(k') = b$ (excepto, naturalmente, caso $k = k'$ e $a \neq b$);*

2. *se* $f, g \in \mathcal{F}$*, então* $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{F}$*,*

então $\mathcal{F}$ *é um sub-conjunto denso de* $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$.

Demonstração: Deduz-se facilmente da segunda hipótese do teorema que

$$f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \max\{f_1, \ldots, f_n\}, \min\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{F}.$$

Seja $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$; quer-se mostrar que $f \in \overline{\mathcal{F}}$, ou seja, quer-se mostrar que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, existe alguma função $g \in \mathcal{F}$ tal que $\sup|f-g| < \varepsilon$. Seja $k \in K$. Para cada $x \in K$, existe alguma função $f_{x,k} \in \mathcal{F}$ tal que $f_{x,k}(x) = f(x)$ e $f_{x,k}(k) = f(k)$. Seja V_x uma vizinhança de x tal que

$$(\forall t \in V_x) : f_{x,k}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

Como K é compacto e cada V_x contém um aberto que contém x, existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^n V_{x_j}$. Seja $f_k = \max\{f_{x_1,k}, \ldots, f_{x_n,k}\}$. Então $f_k \in \mathcal{F}$ e

$$(\forall x \in K) : f_k(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Além disso,

$$f_k(k) = \max\{f_{x_1,k}(k), \ldots, f_{x_n,k}(k)\} = \max\{f(k)\} = f(k).$$

Existe então uma vizinhança U_k de k tal que

$$(\forall t \in U_k) : f_k(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Se $k_1, \ldots, k_m \in K$ forem tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{k_j}$ e se se definir $g = \min\{f_{k_1}, \ldots, f_{k_m}\}$, então $g \in \mathcal{F}$ e, além disso,

– como se tem $f_{k_j}(x) > f(x) - \varepsilon$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ e para cada $x \in K$, tem-se $g(x) > f(x) - \varepsilon$ para cada $x \in K$;

– para cada $x \in K$, existe algum $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in U_{k_j}$, pelo que $g(x) \leqslant f_{k_j}(x) < f(x) + \varepsilon$.

Logo, $(\forall x \in K) : \big|f(x) - g(x)\big| < \varepsilon$, i. e. $\sup|f - g| < \varepsilon$. ∎

O teorema de Kakutani-Krein não é uma generalização do teorema da aproximação de Weierstrass, pois em geral não é verdade que se P_1 e P_2 são funções polinomiais de um intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$, então as funções $\max\{P_1, P_2\}$ e $\min\{P_1, P_2\}$ também sejam polinomiais. Um exemplo de aplicação deste teorema, ainda no caso de

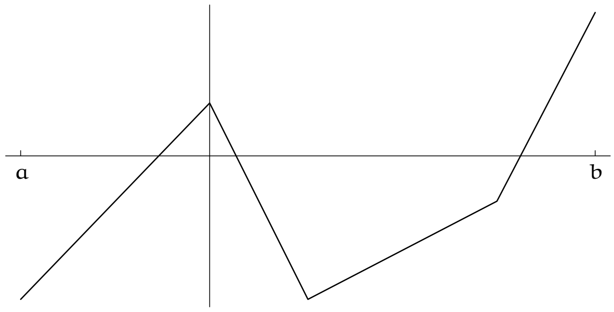

Figura 3.1: Exemplo de gráfico de função linear por bocados

um intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, é dado pelo conjunto das funções lineares por bocados. São as funções cujo gráfico é do tipo do da figura 3.1. Mais precisamente considere-se o conjunto $\mathcal{F}$ das funções contínuas $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ para as quais existem alguma partição $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ de $[a, b]$ e números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ tais que

$$(\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\})(\forall x \in [a_{i-1}, a_i]) : f(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$

É então claro que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições do teorema de Kakutani-Krein, pelo que é um sub-conjunto denso de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a, b])$.

Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$, diz-se que $\mathcal{F}$ *separa os pontos* de K se, sempre que k e k' forem pontos distintos de K, existir alguma função $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(k) \neq f(k')$. Obviamente, se a primeira hipótese do teorema de Kakutani-Krein se verificar, então $\mathcal{F}$ separa os pontos de K. Convém observar que se acrescentar às hipóteses do teorema de Kakutani--Krein que $\mathcal{F}$ é um espaço vectorial (i. e. que se $f, g \in \mathcal{F}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$) que contém as funções constantes e que separa os pontos de K, então a primeira hipótese torna-se redundante. Com efeito, caso $k = k'$ basta tomar a função f que toma sempre o valor a. Caso contrário, seja $\varphi \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(k) \neq \varphi(k')$; define-se então

$$\begin{array}{rccl} f\colon & K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \rightsquigarrow & \frac{\varphi(t)-\varphi(k)}{\varphi(k')-\varphi(k)}(b-a)+a. \end{array}$$

Visto que $\mathcal{F}$ é um espaço vectorial que contém as funções constantes, $f \in \mathcal{F}$ e, além disso, é claro que $f(k) = a$ e que $f(k') = b$. Além disso, se $\mathcal{F}$ for um espaço vectorial, a segunda hipótese do teorema de Kakutani--Krein pode ser substituída por $(\forall f \in \mathcal{F}) : |f| \in \mathcal{F}$, pois se for este o caso então, caso $f, g \in \mathcal{F}$,

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2} \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in \mathcal{F}.$$

Definição 3.1.1 Se $\mathcal{F}$ for um conjunto de funções de um conjunto X em $\mathbb{K}$, diz-se que $\mathcal{F}$ é uma *álgebra de funções* de X em $\mathbb{K}$ se

1. $(\forall f, g \in \mathcal{F}) : f + g \in \mathcal{F}$;
2. $(\forall f, g \in \mathcal{F}) : f.g \in \mathcal{F}$;
3. $(\forall f \in \mathcal{F})(\forall \lambda \in \mathbb{K}) : \lambda f \in \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}'$ for outra álgebra de funções de X em $\mathbb{K}$, diz-se que $\mathcal{F}'$ é uma *sub-álgebra* de $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F}'$ for uma álgebra de funções e se $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

Exemplo 3.1.1 Dado qualquer conjunto X, o conjunto de todas as funções de X em $\mathbb{K}$ é uma álgebra de funções.

Exemplo 3.1.2 O mesmo acontece com o conjunto $\mathcal{F}_l(X)$ de todas as funções limitadas de X em $\mathbb{K}$.

Exemplo 3.1.3 O conjunto de todas as funções polinomiais de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}$ forma também uma álgebra de funções.

Se E for um espaço topológico, então o conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ de todas as funções contínuas de E em $\mathbb{R}$ é uma álgebra de funções. Para o demonstrar, sejam $f, g \in \mathcal{C}(E)$; quer-se mostrar que $f + g$ e $f.g$ são funções contínuas. Considerem-se as funções

$$\begin{array}{rccc} \Delta\colon & E & \longrightarrow & E \times E \\ & x & \rightsquigarrow & (x, x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} h\colon & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & \big(f(x), g(y)\big). \end{array}$$

Então, se a (respectivamente p) representar a adição (resp. o produto) de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, tem-se $f + g = a \circ h \circ \Delta$ (resp. $f.g = p \circ h \circ \Delta$). Logo, para mostrar que $f + g$ e $f.g$ são funções contínuas, basta mostrar que Δ, h, a e p são contínuas.[1] Ora

1. é visto nos cursos de Análise Real de funções de várias variáveis que a adição e o produto são funções contínuas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$;
2. que Δ é contínua resulta imediatamente da proposição 2.3.1;

[1] A topologia que se está aqui a considerar em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$ é a usual. Convém lembrar que foi observado, no exemplo 2.3.1, que, em $\mathbb{R}^2$, a topologia usual é idêntica à topologia produto de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}$.

3. finalmente, para mostrar que h é contínua aplica-se igualmente a proposição 2.3.1. Para mostrar que a função $\pi_1 \circ h\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua basta observar que se A for um aberto de $\mathbb{R}$, então $(\pi_1 \circ h)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times E$, que é um aberto de $E \times E$. Mostra-se de maneira análoga que $\pi_2 \circ h$ é contínua.

Finalmente, se $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, quer-se mostrar que $\lambda f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(E)$. Para tal, veja-se que a função $\varphi_\lambda\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_\lambda(x) = \lambda x$ é contínua e que $\lambda f = \varphi_\lambda \circ f$.

Proposição 3.1.1
Seja K um espaço topológico compacto. Se $\mathcal{F}$ for uma sub-álgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, então $\overline{\mathcal{F}}$ também o é.

Demonstração: É preciso mostrar que se $f, g \in \overline{\mathcal{F}}$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$f + g, f.g, \lambda f \in \overline{\mathcal{F}}. \tag{3.1}$$

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de elementos de $\mathcal{F}$ convergentes para f e para g respectivamente; tais sucessões existem pela proposição 1.4.4. A fim de se mostrar que se tem (3.1), basta mostrar que $\lim_{n\in\mathbb{N}}(f_n + g_n) = f+g$, que $\lim_{n\in\mathbb{N}}(f_n.g_n) = f.g$ e que $\lim_{n\in\mathbb{N}}(\lambda f_n) = \lambda f$, novamente pela proposição 1.4.4. Vai-se mostrar que a segunda daquelas três igualdades é válida; as outras são mais simples de demonstrar. Seja então $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow \sup|f.g - f_n.g_n| < \varepsilon.$$

Para tal, observe-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f.g - f_n.g_n = (f - f_n).g + f.(g - g_n) - (f_n - f).(g_n - g). \tag{3.2}$$

Seja $M \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\sup|f|, \sup|g| < M$ e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p$, então tem-se:

$$\sup|f - f_n|, \sup|g - g_n| < \inf\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3M}\right\}.$$

Resulta então da relação (3.2) e da escolha de p que, caso $n \geqslant p$,

$$\sup|f.g - f_n.g_n| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\right)^2 = \varepsilon.$$ ■

Considere-se, por exemplo, um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{P}([a, b])$ das funções polinomiais de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ forma uma álgebra de funções de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Logo, a proposição anterior afirma que $\overline{\mathcal{P}([a, b])}$ também é uma álgebra de funções de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. De facto, o teorema da aproximação de Weierstrass afirma que esta álgebra não é mais do que $\mathcal{C}([a, b])$.

Vai-se então demonstrar uma generalização do teorema da aproximação de Weierstrass. A demonstração deste teorema foi bastante longa e poder-se-á pensar que a generalização em questão terá uma demonstração maior ainda. De facto, é bastante mais curta. Isto pode parecer paradoxal, mas explica-se pelo facto de a demonstração empregar o teorema da aproximação de Weierstrass, bem como o de Kakutani-Krein.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Stone-Weierstrass)
Seja K um espaço topológico compacto e seja $\mathcal{F}$ uma álgebra de funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ que contenha as funções constantes e que separe os pontos. Então $\mathcal{F}$ é um sub-conjunto denso de $\mathcal{C}(K)$.

Demonstração: Vai-se mostrar que $\overline{\mathcal{F}}$ satisfaz as hipóteses do teorema de Kakutani-Krein. Isto mostra que $\overline{\mathcal{F}}$ é denso; como também é um fechado, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{C}(K)$.

Visto que $\mathcal{F}$ separa os pontos de K e contém as funções constantes então, por maioria de razão, $\overline{\mathcal{F}}$ também tem essas propriedades. Além disso como $\overline{\mathcal{F}}$ é uma álgebra então, em particular, é um espaço vectorial pelo que, conforme foi observado nas páginas 147–148, $\overline{\mathcal{F}}$ satisfaz a primeira condição do teorema de Kakutani-Krein e, a fim de provar que satisfaz a segunda condição, basta provar que se $f \in \overline{\mathcal{F}}$, então $|f| \in \overline{\mathcal{F}}$.

Seja $f \in \overline{\mathcal{F}}$, seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e seja M um majorante de $|f|$. Pelo teorema da aproximação de Weierstrass, existe alguma função polinomial $P\colon [-M, M] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall t \in [-M, M]) : \big||t| - P(t)\big| < \varepsilon.$$

Logo,

$$(\forall x \in K) : \big||f(x)| - P(f(x))\big| < \varepsilon.$$

Como $\overline{\mathcal{F}}$ é uma álgebra de funções que contém as funções constantes e $f \in \overline{\mathcal{F}}$, $P \circ f \in \overline{\mathcal{F}}$, pelo que $|f| \in \overline{\overline{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{F}}$. ∎

Considerem-se, por exemplo, as funções contínuas e periódicas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Cada uma dessas funções é limitada, pelo que se pode considerar no conjunto de tais funções a métrica do supremo. Mais especificamente, suponha-se que se está a trabalhar com o conjunto $\mathcal{P}$ das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que são periódicas de período 2π; quer-se mostrar que o conjunto $\mathcal{T}$ das funções da forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx), \end{array}$$

com $N \in \mathbb{Z}_+$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, formam um sub-conjunto denso deste espaço. Aparentemente, o teorema de Stone-Weierstrass não se aplica, pois nem $\mathbb{R}$ é compacto nem é verdade que se x e y são números reais distintos então existe $f \in \mathcal{T}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Por outro lado, é verdade que $\mathcal{T}$ é uma álgebra de funções; isto resulta de se ter, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ e para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\big(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\big),$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\big(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\big)$$

e

$$\cos(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)\big).$$

Observe-se que $2\pi\mathbb{Z}$ é um sub-grupo do grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$; pode-se então considerar o quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Seja $\Pi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ a projecção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e considere-se neste espaço a topologia final relativamente a Π. Então, uma vez que $[0, 2\pi]$ é uma parte compacta de $\mathbb{R}$ e que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \Pi([0, 2\pi])$, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ é compacto. Por outro lado, se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, então $f \circ \Pi \in \mathcal{P}$ e, reciprocamente, se $f \in \mathcal{P}$, então f é da forma $\tilde{f} \circ \Pi$ para alguma função $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$; basta definir

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f}\colon & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \Pi(x) & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

e observar que $\tilde{f}$ é contínua pela proposição 2.2.7. Logo,

$$\begin{array}{rccc} \Psi\colon & \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & f & \rightsquigarrow & f \circ \Pi \end{array}$$

é uma bijecção. De facto, é claro que se trata de uma isometria, pois se $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, então $\sup|f| = \sup|f \circ \Pi|$, uma vez que Π é sobrejectiva. Pode-se então identificar $\mathcal{T}$ à sub-álgebra $\Psi^{-1}(\mathcal{T})$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ e, para aplicar o teorema de Stone-Weierstrass, só falta provar que se x e y são números reais tais que $\Pi(x) \neq \Pi(y)$, então existe alguma função $f \in \Psi^{-1}(\mathcal{T})$ tal que $f\big(\Pi(x)\big) \neq f\big(\Pi(y)\big)$. Isto é o mesmo que afirmar que se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x - y \notin 2\pi\mathbb{Z}$, então existe alguma função $f \in \mathcal{T}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Mas basta então tomar $f = \operatorname{sen}$ ou $f = \cos$, i. e. se $x - y \notin 2\pi\mathbb{Z}$ então $\operatorname{sen}(x) \neq \operatorname{sen}(y)$ ou $\cos(x) \neq \cos(y)$. De facto, se se tem $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(y)$ e $\cos(x) = \cos(y)$, então tem-se

$$\begin{aligned} 1 &= (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 \\ &= \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \\ &= \cos(x - y), \end{aligned}$$

pelo que $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$.

3.2 Espaços compactos de funções

Em geral, se E for um espaço topológico e se se considerar no espaço $\mathcal{C}_l(E)$ das funções contínuas e limitadas de E em $\mathbb{C}$ a métrica do supremo, então os compactos de $\mathcal{C}_l(E)$ têm o interior vazio.

Exemplo 3.2.1 No caso em que $E = \mathbb{R}$ foi visto no exemplo 2.5.4 na página 111, como exemplo de aplicação do corolário 2.5.4, que a bola fechada unitária de $\mathcal{C}_l(\mathbb{R})$ não é um compacto. Se X for um sub-conjunto de $\mathcal{C}_l(\mathbb{R})$ com interior não vazio, existem então $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $B'(x, r) \subset X$. Mas

$$\begin{array}{ccc} B'(0,1) & \longrightarrow & B'(x,r) \\ y & \rightsquigarrow & x + ry \end{array}$$

é um homeomorfismo, pelo que $B'(x, r)$ não é um compacto. Como $B'(x, r)$ é um sub-conjunto fechado de X que não é compacto, deduz-se da proposição 2.5.1 que X não é compacto.

Vai-se demonstrar um teorema que vai permitir determinar quando é que um sub-conjunto de um tal espaço é compacto.

Definição 3.2.1 Se E_1 é um espaço topológico, (E_2, d) é um espaço métrico e $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções de E_1 em E_2, diz-se que o conjunto $\mathcal{F}$ é *equicontínuo* se, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e para cada $x \in E_1$, existir alguma vizinhança V de x tal que

$$(\forall y \in V)(\forall f \in \mathcal{F}) : d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Naturalmente, se E_1 for um espaço métrico e se d' for a métrica de E_1, então afirmar que a família $\mathcal{F}$ é equicontínua equivale a afirmar que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e para cada $x \in E_1$, existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall y \in E_1)(\forall f \in \mathcal{F}) : d'(x, y) < \delta \Longrightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Definição 3.2.2 Nas condições da definição anterior, se E_1 for um espaço métrico, sendo d' a sua métrica e se, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, se existir algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x, y \in E)(\forall f \in \mathcal{F}) : d'(x, y) < \delta \Longrightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon,$$

diz-se que o conjunto $\mathcal{F}$ é *uniformemente equicontínuo*.

Exemplo 3.2.2 Se E e F forem espaços métricos e se f for uma função de E em F, o conjunto $\{f\}$ é equicontínuo (respectivamente uniformemente equicontínuo) se e só se a função f for contínua (resp. uniformemente contínua).

Exemplo 3.2.3 O conjunto das funções $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ definidas por $f_n(x) = nx$ não é equicontínuo, pois, para cada $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, se $x \in \mathbb{R}$ e se $y = x + \delta/2$, então, se $n \in \mathbb{N}$

$$|nx - ny| = \left| nx - n\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \right| = \frac{n\delta}{2}.$$

Logo, $n \geqslant 2/\delta \Longrightarrow \big|f_n(x) - f_n(y)\big| \geqslant 1$.

Exemplo 3.2.4 O conjunto das funções $f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(t \in [0, 1])$ definidas por $f_t(x) = \operatorname{sen}(tx)$ é uniformemente equicontínuo. Basta ver que se $x, y \in \mathbb{R}$ e se $t \in [0, 1]$ então

$$\begin{aligned} \big|\operatorname{sen}(tx) - \operatorname{sen}(ty)\big| &= \left| 2\cos\left(t \cdot \frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(t \cdot \frac{x-y}{2}\right) \right| \\ &\leqslant 2\left| \operatorname{sen}\left(t \cdot \frac{x-y}{2}\right) \right|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Como a função seno é contínua no ponto 0 e $\operatorname{sen}(0) = 0$, existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x| < \delta \Longrightarrow \big|\operatorname{sen}(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, se $x, y \in \mathbb{R}$ forem tais que $|x - y| < \delta$ então $\big|t(x - y)/2\big| < \delta/2 < \delta$ para cada $t \in [0, 1]$, pelo que se deduz de (3.3) que

$$(\forall t \in [0, 1]) : \big|f_t(x) - f_t(y)\big| < \varepsilon.$$

Segundo o teorema 2.5.6, qualquer função contínua de um espaço métrico compacto num espaço métrico é uniformemente contínua. Existe um resultado análogo para a equicontinuidade e a equicontinuidade uniforme.

Proposição 3.2.1
Se K *e* E *forem espaços métricos, sendo* K *compacto, então qualquer família equicontínua de funções de* K *em* $\mathbb{C}$ *é uniformemente equicontínua.*

A demonstração desta proposição vai ser omitida, pois consiste em aplicar o mesmo método que foi empregue para demonstrar o teorema 2.5.6.

Se K for um espaço topológico compacto e se $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$, então $\mathcal{F}$ herda uma topologia da topologia de $\mathcal{C}(K)$, a qual é, como foi dito no início deste capítulo, a topologia induzida pela métrica do supremo ou, o que é equivalente, a topologia da convergência uniforma (veja-se o exemplo 2.1.2). Outra topologia que se poderia considerar em $\mathcal{F}$ é a topologia da convergência pontual (veja-se o exemplo 2.3.2). Visto que esta última é a topologia menos fina para qual todas as funções

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

($x \in K$) são contínuas e visto que todas aquelas funções são contínuas para a topologia da convergência uniforme, a topologia induzida em $\mathcal{F}$ pela topologia da convergência uniforme é mais fina do que induzida em $\mathcal{F}$ pela topologia da convergência pontual.

Proposição 3.2.2
Seja K *um espaço topológico compacto e seja* $\mathcal{F}$ *uma família equicontínua de funções de* K *em* $\mathbb{C}$*. Então a topologia da convergência pontual e a topologia da convergência uniforme induzem em* $\mathcal{F}$ *a mesma topologia.*

Demonstração: Pelo que foi visto antes do enunciado, só falta provar que qualquer parte A de $\mathcal{F}$ que seja aberta relativamente à topologia da convergência uniforme também é aberta relativamente à topologia da convergência pontual. Se $A = \emptyset$, isto é óbvio. Caso contrário, seja $f \in A$. Existe algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall g \in \mathcal{F}) : d_\infty(f, g) < \varepsilon \Longrightarrow g \in A.$$

Para cada $x \in K$, seja V_x uma vizinhança de x tal que

$$(\forall y \in V_x)(\forall f \in \mathcal{F}) : \left|f(y) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como K é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tais que $K = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Seja

$$A' = \left\{ g \in \mathcal{F} \;\middle|\; (\forall i \in \{1, \ldots, n\}) : |g(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Então A' é um aberto de $\mathcal{F}$ relativamente à topologia da convergência pontual e $f \in A'$. Além disso, $A' \subset A$, pois se $g \in A'$ e se $x \in K$, então $x \in V_{x_i}$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &\leqslant \left|g(x) - g(x_i)\right| + \left|g(x_i) - f(x_i)\right| + \left|f(x_i) - f(x)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, relativamente à topologia da convergência pontual, A é vizinhança de todos os seus pontos e, portanto, é um aberto. ■

Teorema 3.2.1 (Teorema de Arzelà-Ascoli)
Se K for um espaço métrico compacto e se $\mathcal{F}$ for um conjunto de funções contínuas de K em $\mathbb{C}$, então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto se e só se satisfizer as seguintes condições:

- *$\mathcal{F}$ é equicontínuo;*
- *para cada $x \in K$ o conjunto $\{ f(x) \mid f \in \mathcal{F} \}$ é limitado.*

Demonstração: Suponha-se que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto. Se $x \in K$ então a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x\colon & \mathcal{C}(K) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

é contínua. Como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto, $\varphi_x\left(\overline{\mathcal{F}}\right)$ também é compacto, pela proposição 2.5.3. Logo, $\varphi_x\left(\overline{\mathcal{F}}\right)$ é limitado, pelo que $\{ f(x) \mid f \in \mathcal{F} \} (= \varphi_x(\mathcal{F}))$ também é limitado.

Continuando a supor que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto, quer-se provar que $\mathcal{F}$ é equicontínuo. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e seja $x \in K$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacto, existe um conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^n B(f_j, \varepsilon/3)$. Se $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então existe algum $\delta_j \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall y \in K) : d(x, y) < \delta_j \Longrightarrow \left|f_j(x) - f_j(y)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seja $\delta = \min\{\,\delta_j \mid j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Se $f \in \mathcal{F}$ e se $y \in K$ forem tais que $d(x, y) < \delta$, seja $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\sup|f - f_j| < {}^{\varepsilon}/_{3}$. Então

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(y)\right| &\leqslant \left|f(x) - f_j(x)\right| + \left|f_j(x) - f_j(y)\right| + \left|f_j(y) - f(y)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Supnha-se agora que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições do enunciado. Vai-se provar que o conjunto $\mathcal{F}$ é relativamente compacto. Pode-se (e vai-se) supor que nem K nem $\mathcal{F}$ são vazios.

Conforme foi observado na página 122, logo após a definição do conceito de conjunto relativamente compacto, a fim de provar que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto basta provar que está contido em algum compacto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}(K)$. Seja, para cada $x \in K$, $r(x) = \sup\{\,|f(x)| \mid f \in \mathcal{F}\}$. Naturalmente, visto que cada conjunto $\{\,|f(x)| \mid f \in \mathcal{F}\,\}$ é, por hipótese, limitado, $r(x) \in \mathbb{R}_+$. Por outro lado seja, para cada $x \in K$ e para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $V_{x,\varepsilon}$ uma vizinhança de x tal que

$$(\forall y \in V_{x,\varepsilon})(\forall f \in \mathcal{F}) : \left|f(y) - f(x)\right| < \varepsilon; \tag{3.4}$$

sabe-se que tais vizinhanças existem por se estar a supor que $\mathcal{F}$ é equicontínua. Define-se então $\mathcal{H}$ como sendo o conjunto das funções f de K em $\mathbb{C}$ tais que, para cada $x \in K$,

1. $|f(x)| \leqslant r(x)$;
2. $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in V_{x,\varepsilon}) : \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

Resulta da segunda destas condições que $\mathcal{H}$ é equicontínua. Em particular, $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(K)$. É então consequência da definição da função r e de (3.4) que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$. Se se provar que $\mathcal{H}$ é compacto, o teorema estará demonstrado.

Pela primeira condição da definição de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \subset \prod_{x \in K} \overline{D\big(0, r(x)\big)}$ e, pelo teorema de Tychnoff, este produto cartesiano é compacto relativamente à topologia da convergência pontual. Vejamos que, relativamente a esta topologia, $\mathcal{H}$ é compacto. Para tal basta, pela proposição 2.5.1, que se mostre que $\mathcal{H}$ é um fechado de $\prod_{x \in K} \overline{D\big(0, r(x)\big)}$, o que equivale a afirmar que $\mathcal{H}^{\complement}$ é um aberto daquele produto cartesiano. Se $\mathcal{H}^{\complement}$ for vazio, nada há a demonstrar. Caso contrário, seja $f \in \mathcal{H}^{\complement}$. Então $f \notin \mathcal{H}$ e, portanto, existem $x, y \in K$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e $f \in \mathcal{F}$ tais que $y \in V_{x,\varepsilon}$ e que $\left|f(y) - f(x)\right| > \varepsilon$. Existe então algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall z, w \in \mathbb{C}) : \left|z - f(x)\right| < \delta \wedge \left|w - f(y)\right| < \delta \Longrightarrow |z - w| > \varepsilon;$$

basta tomar, por exemplo, $\delta = (|f(y) - f(x)| - \varepsilon)/2$. Seja

$$A = \left\{ g \in \prod_{k\in K} \overline{D(0, r(k))} \;\middle|\; |g(x) - f(x)|, |g(y) - f(y)| < \delta \right\}.$$

Então A é um aberto de $\prod_{k\in K} \overline{D(0, r(k))}$, relativamente à topologia da convergência pontual, $f \in A$ e $A \subset \mathcal{H}^{\complement}$. Como isto acontece para cada $f \in \mathcal{H}^{\complement}$, este conjunto é vizinhança de todos os seus pontos e, portanto, é aberto.

Está então visto que $\mathcal{H}$ é compacto relativamente à topologia da convergência pontual. Mas, pela proposição 3.2.2, isto equivale a afirmar que é compacto relativamente à topologia da convergência uniforme, o que termina a demonstração. ■

Vai ser visto como é possível demonstrar este teorema[2], sob a hipótese adicional de que K é metrizável, sem recorrer à proposição 3.2.2 nem ao teorema de Tychonoff. Sabe-se, pelo corolário 2.5.6, que K é separável, ou seja, que existe algum sub-conjunto denso de K da forma $\{ k_n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Para mostrar que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto basta, pela proposição 2.5.6, mostrar que qualquer sucessão de elementos de $\mathcal{F}$ tem alguma sub-sucessão convergente.

Seja então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{F}$. Como a sucessão $\big(f_n(k_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada de números reais, tem alguma sub-sucessão convergente $\big(f_n(k_1)\big)_{k\in N_1}$. Pelo mesmo motivo, a sucessão $\big(f_n(k_2)\big)_{k\in N_1}$ tem alguma sub-sucessão convergente $\big(f_n(k_2)\big)_{n\in N_2}$. Obviamente, a sucessão $\big(f_n(k_1)\big)_{n\in N_2}$ também é convergente. Continuando deste modo, obtêm-se sub-sucessões $(f_n)_{n\in N_k}$, com $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$, tais que, para cada $p \in \mathbb{N}$, $\big(f_n(k_p)\big)_{n\in N_k}$ converge quando $p \leqslant k$. Sejam g_1 o primeiro termo da sucessão $(f_n)_{n\in N_1}$, g_2 o segundo termo da sucessão $(f_n)_{n\in N_2}$ e assim sucessivamente. Então $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sub-sucessão de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(g_n(k_m)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, para cada $m \in \mathbb{N}$. Vai-se mostrar que a sucessão $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{C}(K)$; para tal, basta mostrar que é de Cauchy, pois $\mathcal{C}(K)$ é um espaço métrico completo, uma vez que é um fechado de $\mathcal{F}_l(K)$ (como foi visto no exemplo 1.3.11 na página 15) e este espaço é completo (como foi visto no exemplo 1.5.4 na página 34).

[2]Mais precisamente, vai ser visto como demonstrar que decorre das duas condições do enunciado que a família $\mathcal{F}$ é relativamente compacta.

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Como $\mathcal{F}$ é equicontínuo, então, pela proposição 3.2.1, $\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínuo, pelo que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k, k' \in K) : d(k, k') < \delta \Longrightarrow \left|g_n(k) - g_n(k')\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como K é compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^N B(k_n, \delta)$. Se $k \in K$, seja $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tal que $d(k, k_j) < \delta$. Então, se $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left|g_m(k) - g_n(k)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|g_m(k) - g_m(k_j)\right| + \left|g_m(k_j) - g_n(k_j)\right| + \left|g_n(k_j) - g_n(k)\right| \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \left|g_m(k_j) - g_n(k_j)\right|. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Como a sucessão $\left(g_n(k_j)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, é uma sucessão de Cauchy; existe então algum $p_j \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geqslant p_j \Longrightarrow \left|g_m(k_j) - g_n(k_j)\right| < \varepsilon/3$. Então, se $p = \max\{\, p_j \mid j \in \{1, 2, \ldots, N\}\,\}$, deduz-se de (3.5) que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \left|g_m(k) - g_n(k)\right| < \varepsilon.$$

Como isto tem lugar para cada $k \in K$, está então provado que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \sup|g_m - g_n| < \varepsilon.$$

3.3 Exercícios

1) Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das função contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f^{-1}(\{x\}) \text{ é finito.}$$

Mostre que $\mathcal{F}$ é denso em $\mathcal{C}([0, 1])$ relativamente à métrica do supremo.

2) Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f^{-1}(\{x\}) \text{ é finito.}$$

Mostre que $\mathcal{F}$ não é denso no espaço das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ relativamente à métrica do supremo. Sugestão: mostre que a função seno não é ponto aderente de $\mathcal{F}$.

3) Sejam K um espaço topológico compacto e $\mathcal{F}$ uma álgebra de funções de E em $\mathbb{R}$ que contém as funções constantes. Considere-se a seguinte condição:

$$(\forall x, y \in E) : x \neq y \Longrightarrow ((\exists f \in \mathcal{F}) : f(x) \neq f(y)). \qquad (3.6)$$

Segundo o teorema de Stone-Weierstrass, a condição (3.6) é suficiente para que $\mathcal{F}$ seja um sub-conjunto denso de $\mathcal{C}(K)$ (relativamente à métrica do supremo).

1. Mostre que se se considerar em $\mathbb{R}$ a topologia grosseira $\mathcal{T}_g$ e a topologia dos complementares finitos $\mathcal{T}_f$ (definida no exercício 1 do capítulo 2), então

   a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ são compactos;

   b) qualquer função contínua de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g)$ ou de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ em $\mathbb{R}$ (munido da topologia usual) é constante.

   Deduza que, em geral, a condição (3.6) não é necessária para que $\mathcal{F}$ seja um sub-conjunto denso de $\mathcal{C}(K)$.

2. Mostre que se K for um espaço métrico compacto então a condição (3.6) é necessária para que $\mathcal{F}$ seja um sub-conjunto denso de $\mathcal{C}(K)$.

4) Seja $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Mostre que existe algum $n \in \mathbb{Z}_+$ e que existem $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$(\forall x \in [0,1]) : \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kx} \right| < \varepsilon.$$

5) Seja K um compacto de $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto das funções polinomiais de K em $\mathbb{R}$ é denso em $\mathcal{C}(K)$ relativamente à métrica do supremo.

6) Na definição de álgebra de funções uma das condições é

$$(\forall f \in \mathcal{F})(\forall \lambda \in \mathbb{R}) : \lambda f \in \mathcal{F}.$$

Suponha que nesta condição se substitui $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$. Mostre que o enunciado do teorema de Stone-Weierstrass continua válido.

7) Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período 2π. Se $n \in \mathbb{Z}_+$, seja

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x)\, dx$$

e, se $n \in \mathbb{N}$, seja

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) f(x)\, dx.$$

Mostre que as sucessões $\big(a_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $\big(b_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ caracterizam completamente a função f. Posto de outro modo, mostre que se $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ também for uma função contínua de período 2π e se $f \neq g$, então existe algum $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a_n(f) \neq a_n(g)$ ou existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n(f) \neq b_n(g)$.

8) Sejam K um espaço topológico compacto e $\mathcal{F}$ uma álgebra de funções contínuas de K em $\mathbb{C}$ que contém as funções constantes e que separa os pontos. Suponha que

– $(\forall f \in \mathcal{F}) : if \in \mathcal{F}$;

– $(\forall f \in \mathcal{F}) : \overline{f} \in \mathcal{F}$.

Mostre que $\mathcal{F}$ é denso no espaço das funções contínuas de K em $\mathbb{C}$ relativamente à métrica do supremo.

9) Deduza do exercício anterior que as funções de $S^1 (= \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\})$ em $\mathbb{C}$ da forma

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \rightsquigarrow & \displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k z^k \end{array}$$

(com $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$ e $a_k \in \mathbb{C}$ quando $m \leqslant k \leqslant n$) formam um sub-conjunto denso no espaço das funções contínuas de S^1 em $\mathbb{C}$ relativamente à métrica do supremo.

10) Use o teorema de Arzelà-Ascoli para demonstrar que, em $\mathcal{C}([0,1])$, $S(0,1)$ não é um compacto.

11) Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tais que

$$(\forall x, y \in [0,1]) : \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant |x - y|.$$

1. Mostre que cada $f \in \mathcal{F}$ é contínua.
2. Considere em $\mathcal{F}$ a métrica do supremo. Mostre que $\mathcal{F}$ é compacto.

12) Seja $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão estritamente crescente de números naturais. Mostre que a aderência do conjunto de funções $\{\, f_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ de $\mathcal{C}([0,2\pi])$ definido por $f_k(x) = \cos(n_k x)$ não é compacta relativamente à métrica do supremo. Deduza que a sucessão de funções

$$\left(\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(nx) \end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

não tem nenhuma sub-sucessão uniformemente convergente para uma função de $[0,2\pi]$ em $\mathbb{R}$.

Apêndice A

Resoluções de exercícios seleccionados

Capítulo 1

Exercício nº5 (alíneas 3. e 4.)

É imediato, directamente a partir da definição, que, dados $r, s \in \mathbb{Q}$, $d_p(r,s) \geqslant 0$ e que $d_p(r,s) = 0$ se e só se $r = s$. Para demonstrar que $d_p(r,s) = d_p(s,r)$, observe-se que esta igualdade é trivial se $r = s$; caso contrário, se se escrever:

$$r - s = p^{\nu_p(r-s)} \cdot \frac{a}{b}$$

com $(a,p) = (b,p) = 1$, então tem-se:

$$s - r = p^{\nu_p(r-s)} \cdot \frac{-a}{b}$$

e $(-a,p) = (b,p) = 1$. Sendo assim, é claro que $\nu_p(s-r) = \nu_p(r-s)$ e, portanto, que $d_p(r,s) = d_p(s,r)$. Finalmente, pretende-se demonstrar que se $t \in \mathbb{Q}$, então

$$d_p(r,t) \leqslant \max\{d_p(r,s), d_p(s,t)\}. \tag{A.1}$$

Antes de se passar à demonstração desta afirmação, observe-se que ela implica que se tem $d_p(r,t) \leqslant d_p(r,s) + d_p(s,t)$. Por outro lado, ao demonstrar-se (A.1), pode-se supor que r, s e t são distintos dois a dois. De facto, se $r = t$, então (A.1) reduz-se a $0 \leqslant \max\{d_p(r,s), d_p(s,t)\}$ e se $r = s$ ou $s = t$, então (A.1) reduz-se a $d_p(r,t) \leqslant d_p(r,t)$. Será então suposto que r, s e t são dois a dois distintos; pretende-se provar que

$$|r-t|_p \leqslant \max\{|r-s|_p, |s-t|_p\},$$

ou seja, mostrar que

$$\nu_p(r-t) \geqslant \min\{\nu_p(r-s), \nu_p(s-t)\}.$$

Sejam $\alpha = r - s$ e $\beta = s - t$. Com esta notação, pretende-se mostrar que $\nu_p(\alpha+\beta) \geqslant \min\{\nu_p(\alpha), \nu_p(\beta)\}$. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ números primos com p tais que:

$$\alpha = p^{\nu_p(r-s)} \cdot \frac{a}{b} \text{ e } \beta = p^{\nu_p(s-t)} \cdot \frac{c}{d}.$$

Vai-se supor que $\nu_p(\alpha) \leqslant \nu_p(\beta)$; a demonstração é análoga se $\nu_p(\alpha) \geqslant \nu_p(\beta)$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= p^{\nu_p(\alpha)} \cdot \frac{a}{b} + p^{\nu_p(\beta)} \cdot \frac{c}{d} \\ &= p^{\nu_p(\alpha)} \frac{a + p^{\nu_p(\beta)-\nu_p(\alpha)}c}{b.d}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Sejam $n \in \mathbb{Z}_+$ e $e \in \mathbb{Z}$ tais que $(e,p) = 1$ e que

$$a + p^{\nu_p(\beta)-\nu_p(\alpha)}c = p^n.e; \tag{A.3}$$

seja $f = b.d$. Então $(f,p) = 1$ e deduz-se de (A.2) e de (A.3) que:

$$\alpha + \beta = p^{\nu_p(\alpha)+n} \cdot \frac{e}{f};$$

logo,

$$\begin{aligned} \nu_p(\alpha+\beta) &= \nu_p(\alpha) + n \\ &= \min\{\nu_p(\alpha), \nu_p(\beta)\} + n \\ &\geqslant \min\{\nu_p(\alpha), \nu_p(\beta)\}. \end{aligned}$$

Exercício nº9

Sejam $x, y \in E$; pretende-se mostrar que $d(x,y) \geqslant 0$. Basta observar que $0 = d(x,x) \leqslant d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$.

Exercício nº18

1. A função não é contínua; de facto, vai ser visto que é descontínua em todos os pontos do domínio. Seja $f \in \mathcal{C}([0,1])$; pretende-se demonstrar que:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists g \in \mathcal{C}([0,1])) : d_1(f,g) < \delta \text{ e } \big|f(0) - g(0)\big| \geqslant \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon = 1$ e seja $\delta > 0$. Se se encontrar uma função $h \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que

$$\int_0^1 |h| \, (= d_1(h,0)) < \delta$$

e que $|h(0)| \geqslant 1$, então a função $g = f + h$ será claramente tal que $d_1(f,g) < \delta$ e que $|f(0) - g(0)| \geqslant 1$. Basta escolher h com um gráfico como o da figura A.1. Mais precisamente, considere-se:

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t/d & \text{se } t < d \\ 0 & \text{se } t \geqslant d. \end{cases}$$

com $d \in]0,1]$. Então $h(0) = 1$ e $\displaystyle\int_0^1 |h| = d/2$. Basta então escolher d tal que $d/2 < \delta$.

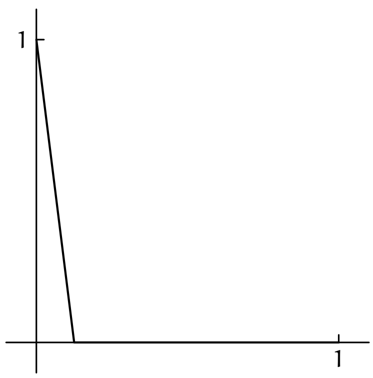

Figura A.1

2. Sim, a função é contínua e é mesmo uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall f, g \in \mathcal{C}([0,1])) : d_\infty(f,g) < \delta \Longrightarrow \big|f(0) - g(0)\big| < \varepsilon.$$

Com efeito, basta tomar $\delta = \varepsilon$, pois se $d_\infty(f,g) < \varepsilon$ então

$$\bigl|f(0) - g(0)\bigr| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} \bigl|f(x) - g(x)\bigr| = d_\infty(f,g) < \varepsilon.$$

Exercício nº21

1. Afirmar que a função é descontínua em todos os pontos do domínio equivale a afirmar que:

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists r' \in \mathbb{Q}) : d_p(r,r') < \varepsilon \text{ e } d(r,r') \geqslant \varepsilon.$$

Sejam então $r \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon = 1$ e $\delta > 0$; pretende-se encontrar um número racional r' tal que $d_p(r,r') < \delta$ e $|r - r'| \geqslant 1$. Para tal basta encontrar um número racional h tal que $|h|_p (= d_p(h,0)) < \delta$ e $|h| \geqslant 1$; uma vez encontrado um tal h, bastará considerar $r' = r + h$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-n} < \delta$. Então $|p^n|_p = p^{-n} < \delta$ (por escolha de n) e $|p^n| = p^n \geqslant 1$.

2. Sim; basta considerar a função que envia $r (\in \mathbb{Q})$ em $|r|_p$. Que esta função é contínua é uma consequência imediata do exercício 14, pois, para cada $r \in \mathbb{Q}$, $|r|_p = d_p(r,0)$.

Exercício nº25

Que as aplicações $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ da forma $f(z) = \omega z + \beta$ ou $f(z) = \omega\bar{z} + \beta$, em que $\omega, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\omega| = 1$, são isometrias é óbvio; o problema consiste em saber se há ou não outras isometrias. De facto não há. Para demonstrar esta afirmação, seja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma isometria; sejam $\beta = f(0)$ e $\omega = f(1) - f(0)$. É claro que $|\omega| = 1$, pois $|\omega| = \bigl|f(1) - f(0)\bigr| = |1 - 0| = 1$. Seja

$$\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \rightsquigarrow & (f(z) - \beta)/\omega; \end{array}$$

é claro que g é uma isometria, que $g(0) = 0$ e que $g(1) = 1$. Pretende-se demonstrar que g é a identidade ou a conjugação; no primeiro caso ter-se-á então que, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega z + \beta$ e no segundo caso ter-se-á, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega\bar{z} + \beta$.

Primeira resolução: Vai-se começar por mostrar que:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : g(z) = z \text{ ou } g(z) = \bar{z}.$$

Seja então $z \in \mathbb{C}$ e seja $w = g(z)$. Sabe-se que $|w| = |z|$ e que $|w - 1| = \bigl|g(z) - g(1)\bigr| = |z - 1|$. Mas também se sabe que:

$$\begin{aligned} |z-1|^2 = |w-1|^2 &\iff |z|^2 - 2\operatorname{Re} z + 1 = |w|^2 - 2\operatorname{Re} w + 1 \\ &\implies \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \end{aligned}$$

pois $|z| = |w|$. Logo, tem-se:

$$(\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2 - (\operatorname{Re} z)^2 = |w|^2 - (\operatorname{Re} w)^2 = (\operatorname{Im} w)^2$$

e, portanto, $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Im} w$; logo, $z = w$ ou $z = \overline{w}$.

Falta mostrar que se tem sempre $g(z) = z$ ou se tem sempre $g(z) = \overline{z}$. Suponha-se, por redução ao absurdo, que existe algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z \neq \overline{z}$ e que existe algum $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(w) = \overline{w} \neq w$. Então $|z - \overline{w}| = \big|g(z) - g(w)\big| = |z - w|$. Mas tem-se

$$\begin{aligned}
|z - \overline{w}| = |z - w| \iff & (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w)^2 = \\
& = (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w)^2 \\
\iff & \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w = \pm(\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w) \\
\iff & \operatorname{Im} z = 0 \text{ ou } \operatorname{Im} w = 0 \\
\iff & z = \overline{z} \text{ ou } w = \overline{w}
\end{aligned}$$

o que é absurdo.

Segunda resolução: Tem-se

$$\big|g(i)\big| = \big|g(i) - g(0)\big| = |i - 0| = 1$$

e

$$\big|g(i) - 1\big| = \big|g(i) - g(1)\big| = |i - 1| = \sqrt{2},$$

pelo que $g(i)$ está na intersecção da circunferência de centro 0 e raio 1 com a circunferência de centro 1 e raio $\sqrt{2}$ (veja-se a figura A.2); logo, $g(i) = \pm i$. Suponha-se que $g(i) = i$; pretende-se demonstrar que g é a

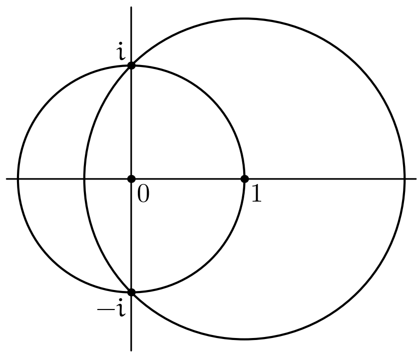

Figura A.2: Circunferências de centros 0 e 1 e raios 1 e $\sqrt{2}$ respectivamente

identidade. Seja $z \in \mathbb{C}$. Sabe-se que $\big|g(z)\big| = |z|$, que $\big|g(z) - 1\big| = |z - 1|$

e que $|g(z) - i| = |z - i|$, ou seja que $g(z)$ esta situado simultaneamente nas três circunferências de centros 0, 1 e i e de raios respectivamente $|z|$, $|z-1|$ e $|z-i|$. Mas três circunferências com centros não colineares só possuem, no máximo, um ponto comum e z pertence a cada uma delas; logo $g(z) = z$.

Se $g(i) = -i$, define-se, para cada $z \in \mathbb{C}$, $\hat{g}(z) = \overline{g(z)}$. A função $\hat{g}$ é uma isometria, $\hat{g}(0) = 0$, $\hat{g}(1) = 1$ e $\hat{g}(i) = i$. Como já foi visto, $\hat{g}$ é a função identidade, pelo que g é a conjugação.

Exercício nº28

Se I for um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e se $a \in I$, existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $]a - r_1, a + r_2[\subset I$. Se $r = \min\{r_1, r_2\}$, então $]a - r, a + r[\subset I$. Mas $]a - r, a + r[= B(a, r)$. Está então provado que

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists r \in \mathbb{R}_+^*) : B(a, r) \subset I,$$

ou seja, que I é um aberto.

Exercício nº31.1 (métrica p-ádica)

O conjunto em questão não é nem aberto nem fechado em $\mathbb{Q}$ relativamente à métrica p-ádica. Para ver que não é aberto, observe-se que se $\varepsilon > 0$, então a bola $B(0, \varepsilon)$ não está contida em $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$; de facto, se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $p^{-n} < \varepsilon$, então $p^n \in B(0, \varepsilon)$ mas $p^n \notin [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Para ver que $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ não é fechado em $\mathbb{Q}$ será demonstrado que nenhuma bola aberta $B(r, \varepsilon)$ com $r \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$ está contida no complementar de $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Sejam $k, a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $r = p^k \frac{a}{b}$ e que $(a, p) = (b, p) = 1$. Se se tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-n-k} < \varepsilon$, então $r - r\frac{p^n}{p^n - 1} \in B(r, \varepsilon)$; basta então escolher n tal que $\left| r - r\frac{p^n}{p^n - 1} \right| \leqslant 1$ para que se tenha $r - r\frac{p^n}{p^n - 1} \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercício nº35

1. Por hipótese, $b \in B(a, r)$, ou seja, $d(a, b) < r$. Basta então provar que $B(a, r) \subset B(b, r)$; por simetria, a inclusão oposta ficará também demonstrada. Seja então $c \in B(a, r)$; pretende-se mostrar que $c \in B(b, r)$, ou seja, mostrar que $d(c, b) < r$. Mas $d(c, b) \leqslant \max\{d(c, a), d(a, b)\} < r$ pois $d(c, a) < r$ e $d(a, b) < r$.

2. Seja $c \in B(a, r)$; pretende-se demonstrar que $c \in B(b, s)$. Seja $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$. Tem-se:

$$d(c, b) \leqslant \max\{d(c, x), d(x, b)\} \leqslant \max\{d(c, a), d(a, x), d(x, b)\}.$$

Mas $d(c,a) < r \leqslant s$, $d(a,x) < r \leqslant s$ e $d(x,b) < s$; deduz-se então que $d(c,b) < s$.

3. Sejam $a \in E$ e $r \in]0,+\infty[$; pretende-se demonstrar que $B(a,r)$ é um fechado de E, ou seja, que o conjunto $\{x \in E \mid d(x,a) \geqslant r\}$ é um aberto. Seja então $x \in E$ tal que $d(x,a) \geqslant r$. A bola $B(x,r)$ não intersecta $B(a,r)$ pois se a intersecção não fosse vazia deduzir-se-ia da alínea anterior que $B(a,r) = B(x,r)$, o que é absurdo porque $x \notin B(a,r)$.

Pretende-se agora demonstrar que $B'(a,r)$ é um aberto. Seja $x \in B'(a,r)$; vai-se mostrar que $B(x,r) \subset B'(a,r)$. De facto, se $y \in B(x,r)$, então $d(y,a) \leqslant \max\big\{d(y,x), d(x,a)\big\} \leqslant r$.

Exercício nº41 (relativamente ao exercício 32)

Observe-se que a topologia induzida pela métrica d_∞ é mais fina do que a topologia induzida pela métrica d_1. De facto, a função identidade de $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ em $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$ é contínua, porque se $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, então:

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |f-g| \\ &\leqslant \int_0^1 \sup|f-g| \\ &= \sup|f-g| \\ &= d_\infty(f,g). \end{aligned}$$

Logo, qualquer aberto (respectivamente fechado) de $(\mathcal{C}([0,1]), d_1)$ é um aberto (resp. fechado) de $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$. Deduz-se que se $A \subset \mathcal{C}([0,1])$, então a aderência de A relativamente a d_∞ está contida na aderência de A relativamente a d_1 e o interior de A relativamente a d_∞ contém o interior de A relativamente a d_1.

1. Seja $A = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(0) = 0\}$. Foi visto, no exercício 18, que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \rightsquigarrow & f(0) \end{array} \tag{A.4}$$

é contínua relativamente à métrica d_∞; logo, o conjunto A é fechado (relativamente à métrica d_∞), pois é a imagem recíproca de $\{0\}$ pela função (A.4) e, portanto, é igual à sua aderência.

A aderência de A relativamente a d_1 é o espaço $\mathcal{C}([0,1])$. De facto, sejam $f \in \mathcal{C}([0,1])$ e $\varepsilon > 0$; quer-se mostrar que existe $g \in B(f,\varepsilon)$ tal que

$g(0) = 0$. Seja $\varepsilon' \in]0, 1]$ e seja

$$\begin{aligned} g\colon\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} f(\varepsilon')x/\varepsilon' & \text{se } x < \varepsilon' \\ f(x) & \text{caso contrário;} \end{cases} \end{aligned}$$

vejam-se os gráficos de f (a cheio) e de g (a tracejado) na figura A.3. Então tem-se:

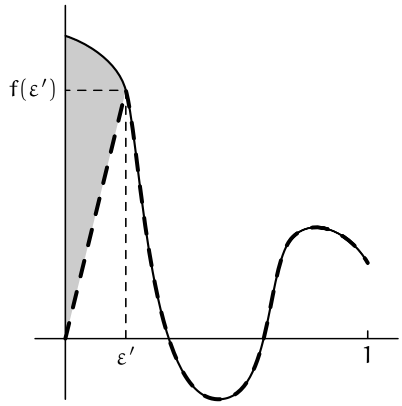

Figura A.3

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |f-g| \\ &= \int_0^{\varepsilon'} |f-g| \text{ (pois } f(x) = g(x) \text{ se } x > \varepsilon') \\ &\leqslant 2M\varepsilon'. \end{aligned}$$

sendo M o máximo de $|f|$. Basta então escolher $\varepsilon' < \varepsilon/2M$.

O interior de A relativamente a d_∞ é vazio. De facto, se $f \in \mathcal{C}([0,1])$ é tal que $f(0) = 0$ e se $\varepsilon > 0$, então a função $g \in \mathcal{C}([0,1])$ definida por $g(x) = f(x) + \varepsilon/2$ está na bola $B(f, \varepsilon)$, mas $g(0) \neq 0$. Deduz-se das observações feitas no início da resolução que o interior de A relativamente a d_1 também é vazio.

2. Seja $A = \{\, f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : \left|f(t)\right| < 1 \,\}$. O conjunto A é, relativamente à métrica d_∞, a bola $B(0, 1)$, sendo 0 a função nula. Logo, é aberto e, portanto, igual ao seu interior. Relativamente à métrica d_1, o conjunto A tem o interior vazio. Para o demonstrar, tome-se f tal que

$(\forall t \in [0,1]) : |f(t)| < 1$ e tome-se $\varepsilon > 0$. Considere-se a função:

$$\begin{array}{rccc} h\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 2 - {}^{4x}/_{\varepsilon} & \text{se } x < {}^{\varepsilon}/_2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

Então $d_1(f, f+h) = {}^{\varepsilon}/_2 < \varepsilon$ pelo que $f + h \in B(f, \varepsilon)$, mas $(f+h)(0) = f(0) + 2 > 1$, pelo que $f + h \notin A$.

Sejam A' a aderência de A relativamente à métrica d_1 e $A^\star$ a aderência relativamente à métrica d_∞. Sabe-se que

$$A^\star \subset \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \;\middle|\; (\forall t \in [0,1]) : \left|f(t)\right| \leqslant 1 \right\},$$

pois este último conjunto é, relativamente à métrica d_∞, a bola $B'(0,1)$ e, portanto, um fechado. De facto, este conjunto é igual a $A^\star$, pois se $(\forall t \in [0,1]) : \left|f(t)\right| \leqslant 1$ e se $\varepsilon > 0$, então a função

$$\begin{array}{rccc} g\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} f(x)(1 - {}^{\varepsilon}/_2) & \text{se } \varepsilon \leqslant 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{array}$$

pertence a A e $d_\infty(f,g) < \varepsilon$. Deduz-se então das observações feitas no início da resolução que $\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : \left|f(t)\right| \leqslant 1 \} \subset A'$. Finalmente, vai-se demonstrar que esta inclusão é uma igualdade. Seja

$$f \in \mathcal{C}([0,1]) \setminus \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid (\forall t \in [0,1]) : \left|f(t)\right| \leqslant 1 \};$$

pretende-se mostrar que $f \notin A'$. Existe algum $t \in [0,1]$ tal que $f(t) > 1$ ou que $f(t) < -1$. Vamos supor que estamos no primeiro caso; o outro caso é análogo. Seja $r = \int_0^1 \max\bigl\{f(t), 1\bigr\} - 1 \, dt$ e seja $g \in B(f, r)$; pretende-se mostrar que $g \notin A$. De facto, se se tivesse $g \in A$, então, em particular, ter-se-ia $g(t) \leqslant 1$ para qualquer $t \in [0,1]$. Logo, para cada $t \in [0,1]$ ter-se-ia:

- se $f(t) > 1$, $\left|f(t) - g(t)\right| = f(t) - g(t) \geqslant f(t) - 1 = \max\bigl\{f(t), 1\bigr\} - 1$;
- se $f(t) \leqslant 1$, $\max\bigl\{f(t), 1\bigr\} - 1 = 0 \leqslant \left|f(t) - g(t)\right|$.

Em ambos os casos tem-se então $\max\bigl\{f(t), 1\bigr\} - 1 \leqslant \left|f(t) - g(t)\right|$, pelo que:

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \int_0^1 |f - g| \\ &\geqslant \int_0^1 \max\bigl\{f(t), 1\bigr\} - 1 \, dt \\ &= r, \end{aligned}$$

o que é absurdo pois, por hipótese, $g \in B(f,r)$.

3. Seja $A = \{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_0^1 f = 0 \}$. Relativamente à métrica d_1, A é fechado e, portanto, idêntico à sua aderência. De facto, se $f \in A^C$, então a bola $B\left(f, |\int_0^1 f|\right)$ não intersecta A, pois se $d_1(f,g) < \left|\int_0^1 f\right|$, então

$$\int_0^1 g = \int_0^1 (g-f) + \int_0^1 f; \tag{A.5}$$

mas

$$\left|\int_0^1 (g-f)\right| \leqslant \int_0^1 |g-f| < \int_0^1 f.$$

Visto que a relação (A.5) exprime $\int_0^1 g$ como a soma de dois números com valores absolutos distintos, este número não pode ser igual a 0. Deduz-se das observações feitas no início da resolução que A é fechado relativamente à métrica d_∞ e que, portanto, também neste caso é igual à sua aderência.

O interior de A relativamente à métrica d_∞ é vazio. Para ver isso, basta observar que se $f \in A$ e $\varepsilon > 0$ e se se definir $g \in B(f,\varepsilon)$ por $g(x) = f(x) + \varepsilon/2$, então $\int_0^1 g = \varepsilon/2$, pelo que $g \notin A$. Pelas observações feitas no início da resolução, sabe-se que o interior de A relativamente à métrica d_1 também é vazio.

Exercício nº42

Cada conjunto $M(I)$ é fechado por ser a intersecção de todos os conjuntos da forma

$$\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(y) - f(x) \geqslant 0 \} \tag{A.6}$$

ou da forma

$$\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(y) - f(x) \leqslant 0 \} \tag{A.7}$$

com $x, y \in I$ e $x < y$. Cada conjunto do tipo (A.6) (respectivamente (A.7)) é fechado por ser a imagem recíproca de $[0,+\infty[$ (resp. $]-\infty,0]$) pela função contínua $F_{x,y} \colon \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_{x,y}(f) = f(y) - f(x)$.

O interior de $M(I)$ é vazio, pois se $f \in \mathcal{C}([0,1])$ for crescente em I e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, então, dado $a \in I$, seja $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0,1]) : |x-a| < \delta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

Seja $g \in \mathcal{C}([0,1])$ uma função que se anula fora de $]a-\delta, a+\delta[$, que toma o valor ε em a e que só toma valores entre 0 e ε nos restantes pontos do domínio. Seja $h = f - g$ (vejam-se, na figura figura A.4, os gráficos das restrições a I de f e de h). Então $h|_I$ não é monótona, pois não é crescente ($h(a-\delta) = f(a-\delta) > f(a) - \varepsilon = h(a)$), nem decrescente ($h(a) < f(a) \leqslant f(a+\delta) = h(a+\delta)$), mas $d_\infty(f, h) = \varepsilon$, pelo que f não pertence ao interior de $M(I)$.

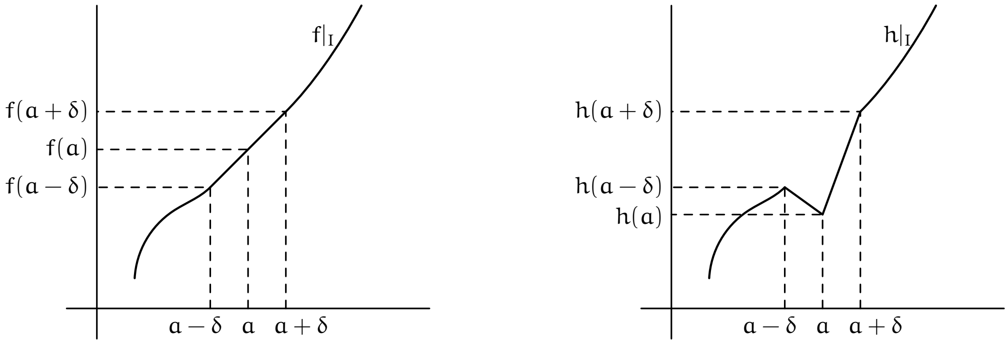

Figura A.4

Analogamente, se $f \in \mathcal{C}([0,1])$ for decrescente, então f não pertence ao interior de $M(I)$.

Exercício nº48

Seja $a \in E_1$ e seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para a; quer-se prover que a sucessão $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(a)$. Por hipótese, esta sucessão converge para algum $b \in E_2$. Considere-se a sucessão $a_1, a, a_2, a, a_3, a, \ldots$, que converge para a. Logo, a sucessão das suas imagens pela função f converge. Como a sub-sucessão dos termos de ordem par das imagens converge para $f(a)$ e a dos termos de ordem ímpar converge para b, $f(a) = b$.

Exercício nº49

1. Seja $\big(x_n, f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de pontos do gráfico e suponha-se que converge para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; vai-se mostrar que (x,y) também pertence ao gráfico, i. e. que $y = f(x)$. Tem-se $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ e resulta então da continuidade de f que $f(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = y$.

2. Sim. Considere-se, por exemplo a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & \begin{cases} 1/x & \text{caso } x \neq 0 \\ 0 & \text{caso } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

cujo gráfico está representado na figura A.5.

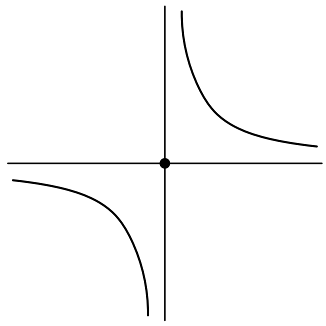

Figura A.5

Exercício nº55

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de um espaço métrico discreto (E, d). Então existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m, n \geqslant p \Longrightarrow d(a_m, a_n) < 1.$$

Mas afirmar que $d(a_m, a_n) < 1$ é o mesmo que afirmar que $a_m = a_n$. Posto de outro modo, se $n \geqslant p$, $a_n = a_p$. Logo, $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_p$.

Exercício nº58

1. Se $m, n \in \mathbb{N}$, então $d_1(f_m, f_n)$ é a área da região a sombreado da figura A.6. Aquela região é formada por dois triângulos congruentes, pelo que a sua área é igual ao dobro da do triângulo de baixo. Este último tem por base o segmento que une $(1/2 - 1/2n, 0)$ a $(1/2 - 1/2m, 0)$, cujo comprimento é $|1/2n - 1/2m|$, e a altura é $1/2$. Logo, a área da região a sombreado é $|1/n - 1/m|/4$.

Então, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, se $p \in \mathbb{N}$ for tal que $1/p < 4\varepsilon$, tem-se, sempre $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $m, n \geqslant p$:

$$d_1(f_m, f_n) = \frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|}{4} \begin{cases} < \frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{4p} < \varepsilon & \text{se } m > n \\ = 0 < \varepsilon & \text{se } m = n \\ < \frac{1}{4m} \leqslant \frac{1}{4p} < \varepsilon & \text{se } m < n, \end{cases}$$

pelo que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

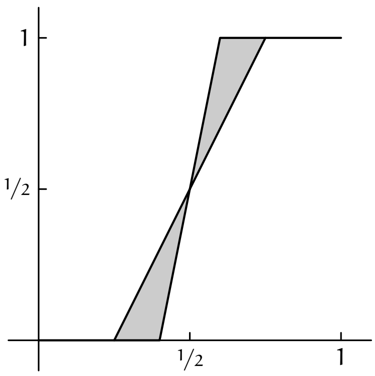

Figura A.6

2. Vai-se provar, por redução ao absurdo, que a sucessão da alínea anterior não converge. Suponha-se então que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Primeiro método: Vai-se provar que caso a sucessão da alínea anterior convergisse para uma função $f \in \mathcal{C}([0,1])$, então tinha-se necessariamente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1/2 \\ 1 & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Como não há nenhuma função contínua de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ nestas condições, isto prova que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

Seja $a \in [0, 1/2[$ e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Se $n \in \mathbb{N}$ for suficientemente grande, então $d_1(f, f_n) < \varepsilon$ e $1/2 - 1/2n > a$. Logo, para um tal n tem-se:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^a f\right| &\leqslant \int_0^a |f| \\ &= \int_0^a |f - f_n| \text{ (pois } f_n \text{ anula-se em } [0,a]) \\ &\leqslant \int_0^1 |f - f_n| \\ &= d_1(f, f_n) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como se tem $\left|\int_0^a f\right| < \varepsilon$ para cada $a \in [0, 1/2[$ e para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, a função

$$\begin{array}{ccc} [0, 1/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \rightsquigarrow & \int_0^a f \end{array}$$

é a função nula, pelo que a sua derivada também se anula. Mas a derivada é a restrição a $[0, 1/2[$ de f.

Analogamente, a função $f - 1$ anula-se em $]1/2, 1]$, ou seja $f(x) = 1$ sempre que $x > 1/2$.

Segundo método: Seja $R_- \colon \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1/2])$ a função definida por $R_-(f) = f|_{[0,1/2]}$; analogamente, seja $R_+ \colon \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([1/2, 1])$ a função definida por $R_+(f) = f|_{[1/2,1]}$. Cada uma destas funções é contínua pois, se $g, h \in \mathcal{C}([0,1])$,

$$\begin{aligned} d_1\big(R_-(g), R_-(h)\big) &= \int_0^{1/2} |g - h| \\ &\leqslant \int_0^1 |g - h| \\ &= d_1(g, h) \end{aligned}$$

e, pelo mesmo argumento, $d_1\big(R_+(g), R_+(h)\big) \leqslant d_1(g,h)$; logo, basta tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de continuidade. Então, pela proposição 1.4.5,

$$R_-(f) = R_-\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} R_-(f_n).$$

Mas $(\forall n \in \mathbb{N}) : d_1\big(R_-(f_n), 0\big) = \frac{1}{8n}$, pelo que $R_-(f) \equiv 0$. Pelo mesmo argumento, $R_+(f) \equiv 1$. Isto é absurdo, pois $f(1/2)$ não pode ser simultaneamente 0 e 1.

3. Primeira resolução: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$; quer-se provar que converge. Visto que, por hipótese, se tem

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \sup|f_m - f_n| < \varepsilon,$$

então, para cada $x \in [0,1]$ tem-se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon,$$

ou seja, a sucessão $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de números reais. Logo, converge para algum $f(x) \in \mathbb{R}$. Falta ver que $f \in \mathcal{C}([0,1])$ e que $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$.

Sejam $a \in [0,1]$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0,1]) : |x - a| < \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow \sup|f_m - f_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$(\forall x \in [0,1]) : \left|f(x) - f_p(x)\right| = \lim_{m \in \mathbb{N}} \left|f_m(x) - f_p(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.8}$$

Como f_p é contínua, existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0,1]) : |x - a| < \delta \Longrightarrow \left|f_p(x) - f_p(a)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Logo, se $x \in [0,1]$ for tal que $|x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(a)\right| &\leqslant \left|f(x) - f_p(x)\right| + \left|f_p(x) - f_p(a)\right| + \left|f_p(a) - f(a)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Finalmente, o argumento usando para demonstrar (A.8) pode ser usado para mostrar que, mais geralmente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,1]) : n \geqslant p \Longrightarrow \left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ou seja, que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant p \Longrightarrow d_\infty(f, f_n) < \varepsilon.$$

Isto é afirmar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f.

Segunda resolução: O espaço métrico $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ é um sub-espaço de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$, que é um espaço métrico completo (exemplo 1.5.4). Logo, para mostrar que $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ é completo basta, pela proposição 1.5.2, que se mostre que $\mathcal{C}([0,1])$ é um fechado de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$. Mas isso foi visto no exemplo 1.3.11. Para além do método empregue neste exemplo, também é possível demonstrar directamente que $\mathcal{C}([0,1])$ é um fechado de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$, i. e. que o seu complementar é um aberto de $(\mathcal{F}_l([0,1]), d_\infty)$. Para tal, seja $f \in \mathcal{F}_l([0,1])$ uma função descontínua. Então f é descontínua em algum $a \in [0,1]$, pelo que, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in [0,1]) : |x - a| < \delta \wedge \left|f(x) - f(a)\right| \geqslant \varepsilon.$$

Seja $g \in B(f, \varepsilon/3)$. Se $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, seja $x \in [0,1]$ tal que $|x - a| < \delta$ e que $\left|f(x) - f(a)\right| \geqslant \varepsilon$. Então, se se tivesse $\left|g(x) - g(a)\right| < \varepsilon/3$, tinha-se

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(a)\right| &\leqslant \left|f(x) - g(x)\right| + \left|g(x) - g(a)\right| + \left|g(a) - f(a)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

o que não se verifica. Logo, g também é descontínua em a. Está então provado que se $f \in \mathcal{C}([0,1])^\complement$, então existe alguma bola aberta centrada em f contida em $\mathcal{C}([0,1])^\complement$.

Exercício nº61

1. Basta aplicar o teorema do ponto fixo de Banach à função

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \rightsquigarrow & F(i,x) \end{array}$$

para cada $i \in I$.

2. Seja $i \in I$; quer-se mostrar que a função

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \rightsquigarrow & \phi_i \end{array}$$

é contínua. Se $j \in I$ tem-se:

$$\begin{aligned} d_E(\phi_i,\phi_j) &= d_E\big(F(i,\phi_i),F(j,\phi_j)\big) \\ &\leqslant d_E\big(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)\big) + d_E\big(F(j,\phi_i),F(j,\phi_j)\big) \\ &\leqslant d_E\big(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)\big) + Kd_E(\phi_i,\phi_j), \end{aligned}$$

pelo que

$$d_E(\phi_i,\phi_j) \leqslant \frac{1}{1-K} d_E\big(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)\big). \tag{A.9}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como F é contínua em (i,ϕ_i), existe $\delta > 0$ tal que

$$d_{I\times E}\big((i,\phi_i),(j,\phi_k)\big) < \delta \Longrightarrow d_E\big(F(i,\phi_i),F(j,\phi_k)\big) < (1-K)\varepsilon.$$

Logo, se $d_I(i,j) < \delta$, tem-se $d_{I\times E}\big((i,\phi_i),(j,\phi_i)\big) < \delta$ e então

$$d_E(F(i,\phi_i),F(j,\phi_i)) < (1-K)\varepsilon.$$

Deduz-se então de (A.9) que $d_E(\phi_i,\phi_j) < \varepsilon$.

Exercício nº66

1. Se não existesse nenhuma função nas condições do enunciado, então tinha-se $\mathcal{C}([0,1]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M(I_n)$. Mas como, relativamente à métrica do supremo, cada $M(I_n)$ é um fechado com interior vazio e como $(\mathcal{C}([0,1],d_\infty)$ é completo (terceira alínea do exercício 58), a reunião dos conjuntos $M(I_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) tem interior vazio, pela versão do teorema de Baire enunciada na página 40; em particular, não pode ser igual a $\mathcal{C}([0,1])$.

2. Seja $f \in \mathcal{C}([0,1])$ uma função que não pertença a nenhum conjunto da forma $M(I_n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Então f está nas condições do enunciado: se I for um intervalo de $[0,1]$ com mais do que um ponto, então $I \supset I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas f não é monótona em I_n, pelo que não é monótona em I.

Capítulo 2

Exercício nº4

1. Pela definição de $\mathcal{T}$ sabe-se que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$; falta então ver que $\mathcal{T}$ é estável para a reunião e para a intersecção finita.

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de $\mathcal{T}$ e seja $A = \bigcup_{i \in I} A_i$; pretende-se mostrar que $A \in \mathcal{T}$. Se algum A_i for igual a $\mathbb{R}$, então $A = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$; pode-se pois supor que todos os A_i são diferentes de $\mathbb{R}$. Também se pode supor que todos os A_i são diferentes de $\emptyset$, pois caso contrário tem-se duas possibilidades.

- Qualquer A_i é vazio; então $A = \emptyset \in \mathcal{T}$.
- Existe algum $i \in I$ tal que $A_i \neq \emptyset$; seja $I' = \{\, i \in I \mid A_i \neq \emptyset \,\}$. É então claro que $A = \bigcup_{i \in I'} A_i$.

Está-se então a supor que cada A_i é da forma $]-\infty, a_i[$. Mas é então claro que $A =]-\infty, \sup\{\, a_i \mid i \in I \,\}[\in \mathcal{T}$.

Sejam agora $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$; pretende-se mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Mais uma vez, pode-se (e vai-se) supor que cada A_i ($i \in \{1, 2\}$) é da forma $]-\infty, a_i[$. É então claro que $A_1 \cap A_2 =]-\infty, \min\{a_1, a_2\}[\in \mathcal{T}$.

Nota: Pelo mesmo motivo atrás apresentado, dado um conjunto X e um conjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$, se se pretender demonstrar que $\mathcal{T}$ é estável para a reunião e para a intersecção finita, pode-se sempre supor que se está a trabalhar com elementos de $\mathcal{T}$ distintos de $\emptyset$ e de X.

2. Se (E, d) é um espaço métrico e $x, y \in E$, há abertos que contêm x mas não contêm y; basta considerar, por exemplo, $B\big(x, d(x, y)\big)$. Logo, se a topologia $\mathcal{T}$ fosse metrizável, então dados $x, y \in \mathbb{R}$ haveria algum $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$. Mas isto é falso: tome-se $x = 1$ e $y = 0$. É claro, pela definição de $\mathcal{T}$, que qualquer elemento de $\mathcal{T}$ que contém x também contém y.

3. Suponha-se, por redução ao absurdo, que a topologia $\mathcal{T}$ é pseudo-metrizável; existe então uma pseudo-métrica $\rho\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que os abertos correspondentes são os elementos de $\mathcal{T}$. Sabe-se, pela alínea anterior, que ρ não pode ser uma métrica, ou seja, que existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\rho(x, y) = 0$. Então qualquer aberto A que contenha x contém y e reciprocamente. De facto, se $x \in A$, então existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mas $y \in B(x, \varepsilon)$, pelo que $y \in A$. Isto é absurdo, pois se $x < y$, o aberto $]-\infty, y[$ contém x mas não contém y e se $y < x$, então o aberto $]-\infty, x[$ contém y mas não contém x.

Exercício nº6

1. Vai-se resolver o problema desta alínea recorrendo ao exercício 5. Quer-se então provar que $\mathcal{F} = \{\, V(I) \mid I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\,\}$ contém o conjunto vazio, contém $\mathbb{C}^n$ e é estável para reuniões finitas e para intersecções arbitrárias.

Tem-se $\emptyset \in \mathcal{F}$ porque $\emptyset = V(\{1\})$. Analogamente, $\mathbb{C}^n \in \mathcal{F}$ porque $\mathbb{C}^n = V(\{0\})$ (e também é igual a $V(\emptyset)$).

Se $(I_j)_{i\in I}$ for uma família de partes de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ então, para cada $w \in \mathbb{C}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} w \in \bigcap_{j\in I} V(I_j) &\iff (\forall j \in I) : w \in V(I_j) \\ &\iff (\forall j \in I)(\forall P \in I_j) : P(w) = 0 \\ &\iff \left(\forall P \in \bigcup_{j\in I} I_j\right) : P(w) = 0, \end{aligned}$$

pelo que $\bigcap_{j\in I} V(I_j) = V\left(\bigcup_{j\in I} I_j\right)$.

Finalmente se $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{C}^n[x_1, \ldots, x_n]$, seja $I = I_1.I_2 \ldots I_n$; posto de outro modo, I é o conjunto dos polinómios $P \in \mathbb{C}^n[x_1, \ldots, x_n]$ que são da forma $\prod_{k=1}^n P_k$, com, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P_k \in I_k$. Então, se $w \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} w \in \bigcup_{k=1}^{n} V(I_k) &\iff (\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}) : w \in V(I_k) \\ &\iff (\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\})(\forall P \in I_k) : P(w) = 0 \\ &\implies (\forall P \in I) : P(w) = 0. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Esta última implicação é uma equivalência, pois se não se tiver (A.10), então, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe algum $P_k \in I_k$ tal que $P_k(w) \neq 0$, de onde resulta que $P_1.P_2 \ldots P_n (\in I)$ não se anula em w. Está então provado que $\bigcup_{k=1}^n V(I_k) = V(I)$.

2. A afirmação que se pretende demonstrar equivale a esta: os conjuntos da forma $V(I)$ ($I \subset \mathbb{C}[x]$) são $\mathbb{C}$ e as partes finitas de $\mathbb{C}$.

Se $I \subset \mathbb{C}[x]$ então $I \subset \{0\}$ ou I contém algum $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ não nulo. No primeiro caso, $V(I) = \mathbb{C}$ e, no segundo, $V(I) \subset \{\text{zeros de } P(x)\}$. Este último conjunto é finito, pelo que $V(I)$ também é finito.

Reciprocamente, seja $F \subset \mathbb{C}$ um conjunto que seja igual a $\mathbb{C}$ ou que seja finito. No primeiro caso, $F = V(\{0\})$ e, no segundo, se $F = \{z_1, \ldots, z_n\}$, então $F = V\big(\big\{\prod_{k=1}^n (z - z_k)\big\}\big)$.

3. Se F é um fechado de $(\mathbb{C}^n, \mathcal{T})$ então, para algum $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$,

$$F = V(I) = \bigcap_{P \in I} \{\text{zeros de } P\} = \bigcap_{P \in I} P^{-1}(\{0\}).$$

Isto exprime F como uma intersecção de fechados de $\mathbb{C}^n$ relativamente à topologia usual (pois as funções polinomiais de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$ são contínuas para a topologia usual), pelo que F é um fechado de $\mathbb{C}^n$ relativamente à topologia usual.

Exercício nº8

Seja $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathcal{B}$. Visto que $\mathcal{T}$ é uma topologia, sabe-se que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ e, por outro lado, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. No entanto, $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{B}$ não é uma topologia; de facto, se $a \in \mathbb{R}$, então

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, a - 1/n],$$

ou seja, $]-\infty, a[$, que não é um elemento de $\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, é reunião de elementos de $\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Deduz-se que os conjuntos da forma $]-\infty, a[$ pertencem a $\mathcal{T}$. Verifica-se facilmente que

$$\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\,]-\infty, a[\mid a \in \mathbb{R} \,\}$$

é uma topologia. Trata-se então necessariamente da topologia gerada por $\mathcal{B}$.

Exercício nº15

1. Seja $\mathcal{V} = \{\, V_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ um conjunto numerável de vizinhanças de um ponto a de $\mathbb{R}$; vai-se mostrar que não é um sistema fundamental de vizinhanças, i. e. vai-se mostrar que existe alguma vizinhança de a que não contém nenhum elemento de $\mathcal{V}$. Por definição de vizinhança, cada $V_n \in \mathcal{V}$ contém algum aberto A_n do qual a é um elemento. Em particular, $A_n \neq \emptyset$, pelo que o conjunto $\mathbb{R} \setminus A_n$ é finito e, por maioria de razão, $\mathbb{R} \setminus V_n$ é finito. Logo, o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus V_n)$ é finito ou numerável; em particular, não é igual a $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Mas

$$\begin{aligned}\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus V_n) \neq \mathbb{R} \setminus \{a\} &\iff \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ &\iff \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \{a\}.\end{aligned}$$

Existe então algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a$ e que pertence a todos os elementos de $\mathcal{V}$. O conjunto $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ é então uma vizinhança de a que não contém nenhum elemento de $\mathcal{V}$.

2. Se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ fosse metrizável, então seria 1-numerável, pela proposição 2.2.3.

Exercício nº17

Nas cinco primeiras alíneas, apenas serão demonstrados os resultados referentes à topologia $\mathcal{T}_e$; as demonstrações são análogas no caso da topologia $\mathcal{T}_d$.

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja

$$\mathcal{V}_a = \{\, V \subset \mathbb{R} \mid (\exists b \in]-\infty, a[) :]b, a] \subset V \,\}.$$

Vejamos que estes conjuntos satisfazem as condições do teorema 2.2.1. Isto é trivial para as três primeiras condições. Quanto à quarta, basta tomar $W =]b, a]$ para algum $b \in]-\infty, a[$ tal que $]b, a] \subset V$. Então, para cada $w \in W$, $]b, a] \in \mathcal{V}_w$, visto que $]b, w] \subset W$.

2. Pelo que foi visto na alínea anterior e pelo teorema 2.2.1 tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_e &= \{\, A \subset \mathbb{R} \mid (\forall a \in A) : A \in \mathcal{V}_a \,\}\\ &= \{\, A \subset \mathbb{R} \mid (\forall a \in A)(\exists b \in]-\infty, a[) :]b, a] \subset A \,\}.\end{aligned}$$

Logo, os intervalos da forma $]b, a]$ pertencem a $\mathcal{T}_e$.

3. Seja $A \in \mathcal{T}$. Então para cada $a \in A$ existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$. Em particular, $]a - \varepsilon, a] \subset A$ e, portanto, A é vizinhança de a relativamente à topologia $\mathcal{T}_e$. Como A é vizinhança de todos os seus pontos, $A \in \mathcal{T}_e$.

4. O conjunto $]-\infty, 0]$ é aberto e fechado para a topologia $\mathcal{T}_e$. Que é aberto resulta do facto de que, para cada $a \in]-\infty, 0]$, $]a - 1, a] \subset]-\infty, 0]$. Que é fechado resulta do facto de que, para cada $a \in]0, +\infty[$, $]0, a] \subset]0, +\infty[$.

5. Considere-se

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0\\ 1 & \text{caso contrário.}\end{cases}\end{aligned}$$

Esta função é descontínua como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Para ver que é contínua se entendida como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, basta ver que é contínua em cada $x \in \mathbb{R}$. Se V for uma vizinhança de $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ só pode ser igual a $]-\infty, 0]$, a $]0, +\infty[$ ou a $\mathbb{R}$. Todos estes conjuntos são elementos de $\mathcal{T}_e$, pelo que f é contínua.

6a. O exemplo anterior também serve neste caso.

6b. Basta tomar $f(x) = -x$. O conjunto $]0, 1]$ pertence a $\mathcal{T}_e$, mas $f^{-1}(]0, 1]) = [-1, 0[$ e este conjunto não pertence a $\mathcal{T}_e$, pois não é vizinhança de -1.

7. A topologia mais fina contida simultaneamente em $\mathcal{T}_e$ e em $\mathcal{T}_d$ é a topologia usual $\mathcal{T}$. Por um lado, já foi visto que tanto $\mathcal{T}_e$ quanto $\mathcal{T}_d$ contêm $\mathcal{T}$. Por outro lado, se $A \in \mathcal{T}_e \cap \mathcal{T}_d$, então, para cada $a \in A$, existe $b < a$ tal que $]b, a] \subset A$ (pois $A \in \mathcal{T}_e$) e existe $c > a$ tal que $[a, c[\subset A$ (pois $A \in \mathcal{T}_d$); logo, $]b, c[\subset A$, pelo que A é vizinhança de a relativamente à topologia $\mathcal{T}$. Como A é vizinhança de todos os seus pontos, $A \in \mathcal{T}$.

A topologia menos fina que contém $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{T}_d$ é a topologia discreta, ou seja, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. De facto, seja $\mathcal{T}'$ uma topologia mais fina do que $\mathcal{T}_e$ e do que $\mathcal{T}_d$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Visto que $\{a\} =]a-1, a] \cap [a, a+1[$, $\{a\} \in \mathcal{T}'$. Se $A \subset \mathbb{R}$, então $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \in \mathcal{T}'$. Logo, $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X)$.

Exercício nº20

1. Suponha-se que f é contínua em $b \in \mathbb{R}$; pretende-se demonstrar que f é semi-contínua superiormente e inferiormente em b. Afirmar que f é semi-contínua superiormente em b significa que se V for uma vizinhança de $f(b)$ (relativamente à topologia do exercício 4), então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de b. Visto que $V(\subset \mathbb{R})$ é uma vizinhança de $f(b)$ sse V contém algum intervalo da forma $]-\infty, a[$ com $a > f(b)$, então para mostrar que f é semi-contínua superiormente em b bastará mostrar que $f^{-1}(]-\infty, a[)$ é uma vizinhança de b quando $a > f(b)$. Mas isto é óbvio, pois f é contínua e $]-\infty, a[$ é um aberto para a topologia usual de $\mathbb{R}$. Mostra-se de maneira análoga que f é semi-contínua inferiormente.

Suponha-se agora que f é semi-contínua superiormente e inferiormente em $b \in \mathbb{R}$. Quer-se mostrar que f é contínua em b, ou seja, quer-se mostrar que, para cada vizinhança V de $f(b)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de b. Se V for uma vizinhança de $f(b)$, existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $V \supset]f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon[$. Então tem-se:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &\supset f^{-1}(]f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon[) \\ &= f^{-1}(]-\infty, f(b) + \varepsilon[\cap]f(b) - \varepsilon, +\infty[) \\ &= f^{-1}(]-\infty, f(b) + \varepsilon[) \cap f^{-1}(]f(b) - \varepsilon, +\infty[). \end{aligned}$$

Este conjunto é um aberto, pois é a intersecção de dois abertos, e contém b. Logo, é uma vizinhança de b, pelo que $f^{-1}(V)$ também o é.

2. Suponha-se que χ_A é uma função semi-contínua superiormente. Então, em particular, $\chi_A^{-1}(]-\infty,1[)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Mas

$$\chi_A^{-1}(]-\infty,1[) = A^{\complement}.$$

pelo que A é fechado.

Suponha-se agora que A é fechado. Pretende-se mostrar que, para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\chi_A^{-1}(]-\infty,a[)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Mas tem-se:

$$\chi_A^{-1}(]-\infty,a[) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } a > 1 \\ A^{\complement} & \text{se } 0 < a \leqslant 1 \\ \emptyset & \text{se } a \leqslant 0 \end{cases}$$

e os conjuntos $\mathbb{R}$, $A^{\complement}$ e $\emptyset$ são abertos de $\mathbb{R}$.

3. Tem-se:

$$\begin{aligned} & f \text{ semi-contínua superiormente} \iff \\ & \iff (\forall a \in \mathbb{R}) : f^{-1}(]-\infty,a[) \text{ é um aberto} \\ & \iff (\forall a \in \mathbb{R}) : (-f)^{-1}(]-a,+\infty[) \text{ é um aberto} \\ & \iff (\forall a \in \mathbb{R}) : (-f)^{-1}(]a,+\infty[) \text{ é um aberto} \\ & \iff -f \text{ semi-contínua inferiormente.} \end{aligned}$$

4. Suponha-se que, para cada $\lambda \in \Lambda$, f_λ é semi-contínua superiormente; pretende-se demonstrar que $\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ é semi-contínua superiormente, ou seja, que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $(\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda)^{-1}(]-\infty,a[)$ é um aberto de $\mathbb{R}$. Observe-se que, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in \left(\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\right)^{-1}(]-\infty,a[) & \iff \inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x) < a \\ & \iff (\exists \lambda \in \Lambda) : f_\lambda(x) < a \end{aligned}$$

e, portanto, que se tem:

$$\left(\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\right)^{-1}(]-\infty,a[) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(]-\infty,a[).$$

Este conjunto é claramente um aberto.

Exercício nº25

Seja $x \in M$. Tem-se então $f(x)\ \mathcal{R}\ x$ (por ii.), mas

$$\begin{aligned} f(x)\ \mathcal{R}\ x &\Longrightarrow g\big(f(x)\big)\ \mathcal{R}\ g(x) \text{ (por iii.)} \\ &\Longleftrightarrow \psi(x)\ \mathcal{R}\ g(x) \\ &\Longrightarrow g\big(\psi(x)\big)\ \mathcal{R}\ g\big(g(x)\big) \text{ (por iii.)} \\ &\Longleftrightarrow g\big(\psi(x)\big)\ \mathcal{R}\ g(x) \text{ (por i.)} \\ &\Longrightarrow f\big(g\big(\psi(x)\big)\big)\ \mathcal{R}\ f\big(g(x)\big) \text{ (por iii.)} \\ &\Longleftrightarrow (\psi \circ \psi)(x)\ \mathcal{R}\ \psi(x). \end{aligned} \tag{A.11}$$

Por outro lado, tem-se $x\ \mathcal{R}\ g(x)$ (por ii.), mas

$$\begin{aligned} x\ \mathcal{R}\ g(x) &\Longrightarrow f(x)\ \mathcal{R}\ g\big(f(x)\big) \text{ (por iii.)} \\ &\Longleftrightarrow f(x)\ \mathcal{R}\ \psi(x) \\ &\Longrightarrow f(f(x))\ \mathcal{R}\ \psi\big(f(x)\big) \text{ (por iii.)} \\ &\Longleftrightarrow f(x)\ \mathcal{R}\ \psi\big(f(x)\big) \text{ (por i.).} \end{aligned}$$

Como isto acontece para cada $x \in M$ então, em particular, tem-se

$$f\big(g(x)\big)\ \mathcal{R}\ \psi\big(f\big(g(x)\big)\big)(\Longleftrightarrow \psi(x)\ \mathcal{R}\ (\psi \circ \psi)(x)) \tag{A.12}$$

para cada $x \in M$. Então, uma vez que $\mathcal{R}$ é anti-simétrica, deduz-se de (A.11) e de (A.12) que $\psi = \psi \circ \psi$. Mostra-se de maneira análoga que $\varphi = \varphi \circ \varphi$.

Se X é um espaço topológico, então sejam $M = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ a relação «inclusão» e f e g as funções de M em M definidas por $f(A) = \mathring{A}$ e por $g(A) = \overline{A}$. Então $\mathcal{R}$, f e g satisfazem as condições da primeira parte do exercício.

Exercício nº29

1. Se $A \subset B$, então $\alpha(B) = \alpha\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \alpha(A) \cup \alpha(B \setminus A) \supset \alpha(B)$.

2. Se $A \subset B$ e $B \in \mathcal{F}$, então, pela primeira alínea e pela definição de $\mathcal{F}$, $\alpha(A) \subset \alpha(B) = B$. Está então provado que, para qualquer $B \in \mathcal{F}$ que contenha A, $\alpha(A) \subset B$. Como $\alpha(A) \in \mathcal{F}$ (pois $\alpha\big(\alpha(A)\big) = \alpha(A)$) e como $\alpha(A) \supset A$, isto prova que $\alpha(A)$ é o menor elemento de $\mathcal{F}$ (relativamente à inclusão) que contém A.

3. Basta ver que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições do exercício 5. Visto que por hipótese, $\alpha(\emptyset) = \emptyset$, é claro que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Como $X \subset \alpha(X) \subset X$, tem-se que

$\alpha(X) = X$ e, portanto, $X \in \mathcal{F}$. Se $(A_j)_{j\in J}$ for uma família de elementos de $\mathcal{F}$, então, para cada $i \in J$, $\bigcap_{j\in J} A_j \subset A_i$, pelo que

$$\alpha\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \subset \alpha(A_i) = A_i.$$

Como isto tem lugar para cada $i \in J$,

$$\alpha\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j\in J} A_j \tag{A.13}$$

e então, como a inclusão inversa tem sempre lugar, a inclusão (A.13) é, de facto, uma igualdade, ou seja, $\bigcap_{j\in J} A_j \in \mathcal{F}$. Finalmente, resulta da última condição do enunciado que se $n \in \mathbb{N}$ e se $A_1, \ldots, A_n \in X$, então

$$\alpha(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \alpha(A_1) \cup \cdots \cup \alpha(A_n).$$

Resulta desta igualdade que se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$.

4. Se $A \subset X$ então, pela proposição 1.3.1, $\overline{A}$ é o menor elemento de $\mathcal{F}$ que contém A. Pela segunda alínea, o menor elemento de $\mathcal{F}$ que contém A é $\alpha(A)$.

Exercício nº35

1. Se f fosse um homeomorfismo, então, em particular, se V fosse uma vizinhança de 0, $f(V)$ seria uma vizinhança de $f(0) = (0,0)$. Considera-se a vizinhança $]-1,1[$ de 0. Se $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, então $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ é negativo e $\frac{2x}{x^2+1}$ tem o mesmo sinal que x, pelo que $f(x)$ está no quarto quadrante (se $x > 0$) ou no segundo (se $x < 0$). Por outro lado, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (0,0),$$

pelo qualquer vizinhança de $(0,0)$ possui elementos da forma $f(x)$ com $x > 1$. Mas se $x > 1$, então $f(x)$ pertence ao primeiro quadrante, pelo que $f(x) \notin f(]-1,1[)$; logo, $f(]-1,1[)$ não é uma vizinhança de $(0,0)$.

2. A função

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \setminus \{(0,1)\} \\ & x & \rightsquigarrow & \left(\dfrac{2x}{x^2-1}, \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{array}$$

é um homeomorfismo cuja inversa é

$$\begin{array}{ccc} S^1 \setminus \{(0,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightsquigarrow & \dfrac{x}{1-y}. \end{array}$$

Deduz-se então que se $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ é tal que

$$(u,v) = f(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

para algum $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $(u, {}^{v}\!/\!{}_{u}) = \varphi(x)$, pelo que

$$x = \frac{u}{1 - {}^{v}\!/\!{}_{u}} = \frac{u^2}{u-v}.$$

Isto mostra que a função inversa de $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ é a função:

$$\begin{array}{ccc} L \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (u,v) & \rightsquigarrow & \dfrac{u^2}{u-v}. \end{array}$$

Visto que esta função é claramente contínua, $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ é um homeomorfismo.

3. Considere-se a função:

$$\begin{array}{cccc} h\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

É claro que h é descontínua relativamente à topologia usual. Seja h_L a função $f \circ h \circ f^{-1}$; pretende-se mostrar que h_L é contínua. Se $(u,v) \in L$, então $(u,v) = f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$, pelo que se tem, quando $(u,v) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} h_L(u,v) &= f\big(h(x)\big) \\ &= f({}^{1}\!/\!{}_{x}) \\ &= \frac{{}^{2}\!/\!{}_{x}}{({}^{1}\!/\!{}_{x})^2+1}\left(1, \frac{({}^{1}\!/\!{}_{x})^2-1}{({}^{1}\!/\!{}_{x})^2+1}\right) \\ &= \frac{2x}{x^2+1}\left(1, -\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \\ &= (u,-v). \end{aligned}$$

A igualdade $h_L(u,v) = (u,-v)$ é também válida quando $(u,v) = (0,0)$. Logo, h_L é contínua.

4. Considere-se a função:

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \min\{1,|x|\}. \end{aligned}$$

Esta função é claramente contínua relativamente à topologia usual. Afirmar que g é descontínua relativamente à topologia $\mathcal{T}$ é o mesmo que afirmar que

$$g_L = f \circ g \circ f^{-1} \colon L \longrightarrow L$$

é descontínua relativamente à topologia usual em L. Cálculos simples mostram que:

$$(\forall (u,v) \in L) : g_L(u,v) = \begin{cases} (u,v) & \text{se } u \geqslant 0 \text{ e } v \leqslant 0 \\ (-u,-v) & \text{se } u \leqslant 0 \text{ e } v \geqslant 0 \\ (1,0) & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Esta função é descontínua pois, por um lado, $g_L(0,0) = (0,0)$ e, por outro, lado qualquer vizinhança de $(0,0)$ contém pontos da forma (u,v) com $u,v > 0$, pontos estes que são enviados por g_L em $(1,0)$.

Exercício nº39

Se $\mathbb{Q}$ fosse topologicamente completo, resultaria do teorema de Baire que qualquer intersecção de uma família numerável de abertos densos de $\mathbb{Q}$ teria intersecção densa. Mas a família $(\mathbb{Q} \setminus \{q\})_{q\in\mathbb{Q}}$ é uma família numerável de abertos densos de $\mathbb{Q}$ com intersecção vazia.

Exercício nº48

Considere-se a função

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \frac{x}{1+|x|}. \end{aligned}$$

Pela definição de d tem-se que $(\forall x,y \in \mathbb{R}) : d(x,y) = \bigl|f(x) - f(y)\bigr|$ pelo que, se $I = f(\mathbb{R})$, f é uma bijecção de $(\mathbb{R}, d)$ em I (relativamente à topologia usual em I). É claro que $I \subset]-1,1[$, pois se $x \in \mathbb{R}$, então $\bigl|f(x)\bigr| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$. Por outro lado, se $y \in]-1,1[$, então $y = f\bigl(\frac{y}{1-|y|}\bigr)$.

Isto mostra que $I =]-1,1[$ e que f é uma bijecção de $\mathbb{R}$ em $]-1,1[$ cuja inversa é

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightsquigarrow & \dfrac{x}{1-|x|}. \end{array}$$

Está então visto que f é uma isometria de $(\mathbb{R}, d)$ em $]-1,1[$. Como este último espaço não é completo, $(\mathbb{R}, d)$ também não é completo.

Para ver que a topologia induzida por d é a usual basta provar que a função $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ é um homeomorfismo se se considerar no domínio a topologia usual. Visto que f é um homeomorfismo de $(\mathbb{R}, d)$ em $]-1,1[$, isto é o mesmo que provar que $f \circ \mathrm{id}$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ em $]-1,1[$, ambos munidos da topologia usual. Mas isto é óbvio, pois f é contínua e f^{-1} também.

Exercício nº50

A condição (a) do enunciado significa que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon, \tag{A.14}$$

enquanto que a condição (b) significa que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \left|\frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n}\right| < \delta \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{A.15}$$

Logo, basta provar que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, as condições (A.14) e (A.15) são equivalentes. Seja então $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Convém observar que a sucessão $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e converge para 1.

Se se tiver (A.14), ou seja, se existir algum $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geqslant p \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$, seja

$$\delta = \inf\left\{ \left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| \,\middle|\, m \neq n \wedge (m < p \vee n < p) \right\}.$$

Como a sucessão $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente,

$$\delta = \frac{p}{p+1} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^2+p} \neq 0.$$

Se $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $\left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| < \delta$ então, pela definição de δ, $m = n$ ou $m, n \geqslant p$. Em qualquer dos casos, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Se se tiver (A.15), ou seja, se existir algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, se $\left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| < \delta$, então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \delta < \frac{p}{p+1}$. Se $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $m, n \geqslant p$, então os números $\frac{m}{m+1}$ e $\frac{n}{n+1}$ estão em $\left[\frac{p}{p+1}, 1\right[\subset]1-\delta, 1[$. Logo, $\left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| < \delta$ e, portanto, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Exercício nº54

Vai-se mostrar que o complementar do gráfico de f, ou seja, o conjunto $A = \left\{ (x, y) \in E^2 \;\middle|\; y \neq f(x) \right\}$ é um aberto de E^2. Seja $(x, y) \in A$; vai-se mostrar que A é vizinhança de (x, y). Resultará daqui que A é aberto, pois é vizinhança de todos os seus pontos.

Como $(x, y) \in A$, $y \neq f(x)$. Logo, como E é separado, existem abertos $A_{f(x)}$ e A_y de E tais que $f(x) \in A_{f(x)}$, $y \in A_y$ e $A_{f(x)} \cap A_y = \emptyset$. Seja $A_x = f^{-1}(A_{f(x)})$. Então $x \in A_x$ e, como f é contínua, A_x é um aberto de E, pelo que $A_x \times A_y$ é um aberto de E^2. Se $(z, w) \in A_x \times A_y$, então $w \neq f(z)$, pois $z \in A_x \Longrightarrow f(z) \in A_{f(x)}$ e então, como $w \in A_y$ e $A_{f(x)}$ e A_y não se intersectam, $w \neq f(z)$, ou seja, $(z, w) \in A$. Está então provado que A contém um aberto que contém (x, y), nomeadamente $A_x \times A_y$.

Exercício nº65

1. Sejam

$$\begin{aligned} Y_+ &= \left\{ \left(x, \operatorname{sen}(1/x)\right) \;\middle|\; x \in]0, +\infty[\right\}; \\ Y_- &= \left\{ \left(x, \operatorname{sen}(1/x)\right) \;\middle|\; x \in]-\infty, 0[\right\}; \\ Y_0 &= \{ (0, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \}. \end{aligned}$$

Vai-se mostrar que $Y_0 \subset \overline{Y_+}$. De facto, seja $(0, y) \in Y_0$. Sabe-se que a equação $\operatorname{sen}(x) = y$ possui alguma solução x_0 e que todos os números reais da forma $x_0 + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) são soluções da equação. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geqslant k \Rightarrow x_0 + 2n\pi > 0$; então a sucessão

$$\left(\frac{1}{x_0 + 2n\pi}, \operatorname{sen}(x_0 + 2n\pi) \right)_{n \geqslant k} = \left(\frac{1}{x_0 + 2n\pi}, y \right)_{n \geqslant k}$$

é uma sucessão de elementos de Y_+ que converge para $(0, y)$, pelo que $(0, y) \in \overline{Y_+}$. Deduz-se então que $Y_+ \subset Y_0 \cup Y_+ \subset \overline{Y_+}$, pelo que $Y_0 \cup Y_+$ é conexo, pela proposição 2.4.2. Analogamente, pode-se mostrar que $Y_0 \cup Y_-$ é conexo, pelo que Y é a reunião de dois conexos (nomeadamente, $Y_0 \cup Y_+$ e $Y_0 \cup Y_-$) cuja intersecção não é vazia, pelo que Y é conexo.

2. Nesta resolução, a única topologia que se vai considerar em subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$ é a topologia usual.

Vai-se mostrar que Y_+, Y_0 e Y_- são componentes conexas por arcos de Y. Que cada um é conexo por arcos é óbvio, pois Y_0 é homeomorfo ao intervalo $[-1, 1]$, a função

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & Y_+ \\ x & \rightsquigarrow & \left(x, \operatorname{sen}(1/x)\right) \end{array}$$

é um homeomorfismo de $]0,+\infty[$ em Y_+ e de maneira análoga, $]-\infty,0[$ é homeomorfo a Y_-.

Vai-se agora mostrar que não existe nenhuma função contínua f de $[0,1]$ em Y tal que $f(0) \in Y_0$ e $f(1) \in Y_+$. Suponha-se, por redução ao absurdo, que uma tal função f existe. Seja $A = \{\, t \in [0,1] \mid f(t) \in Y_0 \,\}$ e seja $s = \sup A$; a definição de s faz sentido pois A não é vazio, visto que $0 \in A$. É claro que $s \in [0,1]$ e que $s \in \overline{A}$; mas então, visto que $f(A) \subset Y_0$, $f(s) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{Y_0} = Y_0$, pois Y_0 é fechado. Deduz-se da definição de s que $f(]s,1]) \cap Y_0 = \emptyset$; de facto, $f(]s,1]) \subset Y_+$, pois que $f(1) \in Y_+$ e $f(]s,1])$ é uma parte conexa de $Y_+ \cup Y_-$. Seja agora V uma vizinhança de $f(s)$ que não contenha nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$ da forma $(x,1)$ (naturalmente, não será possível encontrar uma tal vizinhança se $f(s) = (0,1)$, mas nesse caso bastará considerar uma vizinhança de $f(s)$ que não contenha nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$ da forma $(x,-1)$ e proceder de maneira análoga). Visto que f é contínua em s, existe algum intervalo aberto U tal que $s \in U \subset [0,1]$ e tal que $f(U) \subset V$. Seja $t \in]s,1] \cap U$; então $f(t) = (x, \operatorname{sen}(1/x))$ para algum $x \in]0,+\infty[$. Seja $y \in]0,x[$ tal que $\operatorname{sen}(1/y) = 1$. Sabe-se que $(y, \operatorname{sen}(1/y)) \notin V$, pelo que $f(U)$ contém pelo menos um elemento de Y com primeira coordenada nula (por exemplo, $f(s)$) e pelo menos um elemento de Y com primeira coordenada maior do que y (por exemplo, $f(t)$), mas não contém nenhum elemento cuja primeira coordenada seja igual a y. Logo $f(U)$ não é conexo, o que é absurdo, pois U é conexo e f é contínua.

Pode-se mostrar de maneira análoga que não existe nenhuma função contínua $f\colon [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $f(0) \in Y_0$ e $f(1) \in Y_+$. Finalmente, se existisse alguma função $f\colon [0,1] \longrightarrow Y$ contínua tal que $f(0) \in Y_-$ e $f(1) \in Y_+$, então, pelo teorema dos valores intermédios, existiria algum $t_0 \in]0,1[$ tal que a primeira coordenada de $f(t_0)$ seria nula, pelo que se teria $f(t_0) \in Y_0$. Mas então a função

$$\begin{array}{rccc} g\colon & [0,1] & \longrightarrow & Y \\ & t & \rightsquigarrow & f(t_0 + t(1-t_0)) \end{array}$$

seria contínua e ter-se-ia $g(0) = f(t_0) \in Y_0$ e $g(1) = f(1) \in Y_+$, o que é absurdo, conforme já foi visto.

Exercício nº74 (alíneas 1., 2., 3. e 4.)

1. Se A for um aberto de E, então $A \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E pois é igual a A. Caso contrário, $E \setminus (A \setminus \{\infty\}) = A^{\complement}$, que é compacto e, portanto, uma vez que E é separado, é um fechado de E, pela proposição 2.5.2. Logo, $A \setminus \{\infty\})$ é um aberto de E.

2. É claro que $\emptyset \in \mathcal{T}$ (pois $\emptyset \subset E$ e é um aberto de E) e que $\overline{E} \in \mathcal{T}$ (pois $\infty \in \overline{E}$ e $\overline{E}^{\complement} = \emptyset$, que é um compacto).

Se $(A_j)_{j\in I}$ for uma família de elementos de $\mathcal{T}$, quer-se provar que $\bigcup_{j\in I} \in \mathcal{T}$. Caso ∞ não pertença a nenhum A_j ($j \in I$), então tem-se uma família de abertos de E e, portanto, a sua reunião é um aberto de E, pelo que pertence a $\mathcal{T}$. Caso contrário, seja $i \in I$ tal que $\infty \in A_i$. Então $\infty \in \bigcup_{j\in I} A_j$ e, por outro lado, $A_i^{\complement}$ é um compacto de E. Mas então

$$\left(\bigcup_{j\in I} A_j\right)^{\complement} = \bigcap_{j\in I} A_j^{\complement} \subset A_i^{\complement}.$$

Como $\infty \notin A_i^{\complement}$, $\bigcap_{j\in I} A_j^{\complement} = \bigcap_{j\in I}\left(A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}\right)$. Mas cada conjunto do tipo $A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}$ ($j \in I$) é um fechado de E, pois $E \setminus (A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}) = A_j \setminus \{\infty\}$ e, pela primeira alínea, $A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E. Logo, $\bigcap_{j\in I}\left(A_j^{\complement} \setminus \{\infty\}\right)$ é um fechado do compacto $A_i^{\complement}$ e, portanto, é compacto, pela proposição 2.5.1. Está então provado que o conjunto $\bigcup_{j\in I} A_j$ contém ∞ e que o seu complementar é compacto, pelo que pertence a $\mathcal{T}$.

Finalmente, seja $(A_j)_{j\in I}$ uma família finita de elementos de $\mathcal{T}$; quer-se mostrar que $\bigcap_{j\in I} A_j \in \mathcal{T}$. Se ∞ pertencer a todos os A_j ($j \in I$), então também pertence à intersecção e

$$\left(\bigcap_{j\in I} A_j\right)^{\complement} = \bigcup_{j\in I} A_j^{\complement}.$$

Como cada $A_j^{\complement}$ ($j \in I$) é compacto e I é finito, a reunião anterior é compacta, pelo exercício 71. Logo, pertence a $\mathcal{T}$. Caso ∞ não pertença a A_i, para algum $i \in I$, então ∞ não pertence à intersecção e

$$\bigcap_{j\in I} A_j = \bigcap_{j\in I} (A_j \setminus \{\infty\}). \tag{A.16}$$

Pela primeira alínea, cada conjunto da forma $A_j \setminus \{\infty\}$ ($j \in I$) é um aberto de E. Portanto, o membro da direita de (A.16) é um aberto de E, por I ser finito.

3. Quer-se provar que, se $A \subset E$, então A é um aberto de E se e só se $A = A^\star \cap E$ para algum $A^\star \in \mathcal{T}$. Caso A seja um aberto de E, basta tomar $A^\star = A$. Reciprocamente, seja $A^\star \in \mathcal{T}$. Então $A^\star \cap E = A \setminus \{\infty\}$ e já foi visto que $A \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E.

4. Primeira resolução: Seja $(A_j)_{j\in I}$ uma cobertura aberta de $\overline{E}$; quer-se mostrar que tem alguma sub-cobertura finita. Existe algum

$i_0 \in I$ tal que $\infty \in A_i$ e então $A_i^\complement$ é compacto. Como $A_i^\complement \subset \overline{E} = \bigcup_{j\in I} A_j$, $(A_i^\complement \cap A_j)_{j\in I}$ é uma cobertura aberta de $A_i^\complement$. Mas então, uma vez que $A_i^\complement$ é compacto, existe uma parte finita F de I tal que $A_i^\complement \subset \bigcup_{j\in F}(A_j \cap A_i^\complement)$ e, portanto,

$$\overline{E} = A_i \cup A_i^\complement = A_i \cup \bigcup_{j\in F} A_j = \bigcup_{j\in F\cup\{i\}} A_j.$$

Segunda resolução: Pode-se mostrar que $\overline{E}$ é compacto recorrendo à proposição 2.5.4. Seja então $\mathcal{F}$ uma família de partes não vazias de $\overline{E}$ tal que a intersecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{F}$ contenha algum elemento de $\mathcal{F}$; quer-se mostrar que algum elemento de $\overline{E}$ adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Comece-se por supor que existe algum sub-espaço compacto K de E que contenha algum $F_0 \in \mathcal{F}$. Então seja $\mathcal{F}_K = \{\, F \cap K \mid F \in \mathcal{F} \}$. Se $F \in \mathcal{F}_K$ então $F \neq \emptyset$, pois $F = F^\star \cap K$, para algum $F^\star \in \mathcal{F}$, $F^\star \cap K \supset F^\star \cap F_0$ e este último conjunto não é vazio, pois contém algum elemento de $\mathcal{F}$. Por outro lado, se $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_K$ $(n \in \mathbb{N})$, então, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $F_j = F_j^\star \cap K$, para algum $F_j^\star \in \mathcal{F}$. Então

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_j = \bigcap_{j=1}^{n} (F_j^\star \cap K) \supset \bigcap_{j=0}^{n} F_j$$

e este último conjunto é uma parte de K que contém algum elemento de $\mathcal{F}$; logo, contém algum elemento de $\mathcal{F}_K$. Sendo assim, visto que K é compacto, a proposição 2.5.4 garante que algum elemento de K adere a todos os elementos de $\mathcal{F}_K$; logo, adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Suponha-se agora que nenhum sub-espaço compacto de E contém um elemento de $\mathcal{F}$. Vai-se ver que, neste caso, ∞ adere todos os elementos de $\mathcal{F}$. Seja V uma vizinhança de ∞. Então V contém algum $A \in \mathcal{T}$ tal que $\infty \in A$, pelo que $A^\complement$ é um sub-espaço compacto de E. Por hipótese, $A^\complement$ não contém nenhum elemento de $\mathcal{F}$, pelo que A intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}$ e, por maioria de razão, V intersecta todos os elementos de $\mathcal{F}$, o que é o mesmo que dizer que ∞ adere a todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Exercício nº77

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de elementos de E definida na sugestão. Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \neq n$, então tem-se, para cada $k \in \mathbb{N}$, que

$$\left|x(m)_k - x(n)_k\right| = \begin{cases} 1 & \text{se } k = m \text{ ou } k = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pelo que $d\big(x(m), x(n)\big) = 1$. Sendo assim, nenhuma sub-sucessão de $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pode ser de Cauchy, pelo que $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem sub-sucessões convergentes. Logo, (E, d_∞) não é compacto, pelo teorema 2.5.5.

Exercício nº81

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja ι uma função que preserva as distâncias de (E, d) num espaço métrico completo (F, d'). Como ι preserva as distâncias e L é totalmente limitado, $\iota(L)$ também é totalmente limitado. Seja $K = \overline{\iota(L)}$. Então K é totalmente limitado. Como também é fechado e (F, d') é completo, K é completo. Visto que K também é totalmente limitado, é compacto.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se existir uma isometria f naquelas condições, então $\overline{f(L)}$ é totalmente limitada, pois é compacta. Logo, $f(L)$ é totalmente limitado, por ser um subconjunto do anterior. Como f preserva as distâncias, L também é totalmente limitado.

Capítulo 3

Exercício nº6

Quem examinar a demonstração do teorema de Stone-Weierstrass apercebe-se de que a única passagem onde poderá ser necessário usar a condição do enunciado com λ real mas não necessariamente racional é a passagem na qual se usa implicitamente que se f pertence a uma álgebra de funções $\mathcal{F}$ e P é uma função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, então $P \circ f$ também pertence a $\mathcal{F}$. No entanto, as funções polinomiais que surgem no decorrer da demonstração são as que resultam de se aplicar o teorema de Weierstrass a uma restrição da função módulo. Mas sabe-se, pela terceira alínea do exercício 43 do capítulo 1, que o teorema de Weierstrass continua válido se se considerarem apenas os polinómios com coeficientes racionais.